

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING

WIEN

WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

PAUL URBAN

GRAZ

10. BAND 1.—2. HEFT

MIT 61 ABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM JANUAR 1956)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1956

Die *Acta Physica* erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mülkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mülkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenen Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

10. Band/1.—2. Heft. Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hörl, E. und F. Stangler. Feldelektronenmikroskopische Schirmbilder bei Anwesenheit organischer Dämpfe im Versuchsrohr	1
Braun, G. Zur Methode der stationären Phase	8
Krzywoblocki, M. Z. v. and G. Shinosaki. On Drag of Some Bodies in Free Molecule Flow	34
Schneider, W. H. Die Plasma-Kenngrößen einer Quecksilber-Niederdruck-Entladung mit mehreren Elektronengruppen	54
Hittmair, O. Winkelkorrelationen	66
Melan, E. Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel	81
Penfield, R. H. and H. Zatzkis. On the Determination of the Equations of Motion from a General, Covariant, Non-linear Field Theory by the Approximation Method of EINSTEIN, INFELD, and HOFFMAN	87
Kassecker, T. and P. Urban. Über die Berechnung von Kernmomenten nach dem Schalenmodell	95
Herglotz, H. und E. Deimel. Über die Abhängigkeit des Röntgenspektrums von der chemischen Bindung	127
Roth, H. Pressure Distribution on a Wall under Impact of a Subsonic Gas Jet	142
Haefer, R. Zur experimentellen Prüfung der wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission	149
Buchbesprechungen	162

112723

Feldelektronenmikroskopische Schirmbilder bei Anwesenheit organischer Dämpfe im Versuchsrohr

Von

E. Hörl und F. Stangler

II. Physikalisches Institut der Universität Wien

Mit 5 Abbildungen

(Eingelangt am 12. Januar 1955)

Zusammenfassung

Bei Anwesenheit organischer Dämpfe im Versuchsrohr überlagern sich dem Emissionsbild des reinen Metalls zahlreiche Lichtpunkte, von denen viele eine zwei- oder vierzählige Struktur besitzen. Bei längerem Betrieb des Versuchsrohrs unter angelegter Hochspannung übernimmt ein einziges Emissionszentrum die gesamte Emission. Das Verhalten dieses Zentrums wurde näher untersucht. Aus Strom-Spannungskennlinien wurde mit Hilfe der Feldemissionstheorie die Größe des bilderzeugenden Objekts abgeschätzt. Ein Erklärungsversuch für das Zustandekommen der doppelten und vierfachen Bildpunkte und für das Entstehen und Verhalten des später folgenden Emissionszentrums wird vorgebracht.

1. Aufbau des Versuchsrohrs

Um geeignete Spitzenätzverfahren erproben zu können, wählten wir eine Form des Versuchskolbens wie Abb. 1 zeigt. Das Gestänge G mit dem Spitzenbügel K ist an einem Schliff angeschmolzen und kann so leicht herausgenommen werden. Außerdem ist der Spitzenbügel selbst in Klemmvorrichtungen aus Nickel befestigt. Vor der Kathode befindet sich der Anodenring R . Bei A war der Versuchskolben, der einen Durchmesser von 15 cm hatte, über eine mit flüssiger Luft gekühlte Falle an eine zweistufige Öldiffusionspumpe angeschlossen. Der Leuchtschirm L aus Zinksilikat war mit einer dünnen Goldschicht bedampft und diese mit Hilfe von Aqua Dag mit dem Anodenschluß verbunden. Dies erwies sich für genaue Emissionsstrommessungen als günstig, um eine Aufladung des Leuchtschirms zu vermeiden. B_1 und B_2 sind Bedampfungseinrichtungen, die jedoch nicht verwendet wurden. Unter Verwendung hochwertigen Vakuumfettes erreichten wir nach mehrstündigem Auspumpen Vakua in der Größenordnung von 10^{-6} Torr. Dieser restliche Dampfdruck rührte außer von Luftresten von Dämpfen des Apiezonfettes der Schliffdichtung, sowie von ge-

ringen Mengen von Äthyläther und Butylazetat, den Aufschlammflüssigkeiten des Leuchtschirms her, da ja das Rohr nicht durch Ausheizen entgast werden konnte.

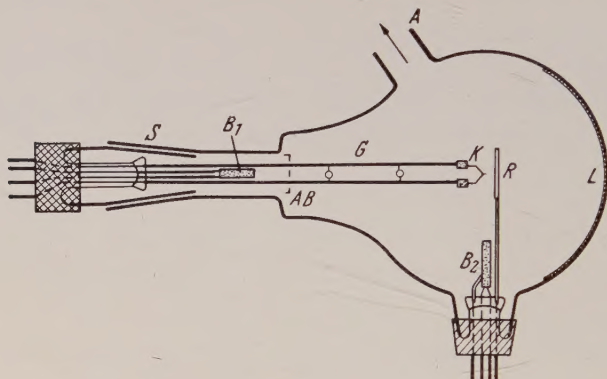


Abb. 1. Aufbau des Versuchsrohrs

L Leuchtschirm	AB Abschirmblech	B ₁ , B ₂ Bedampfungseinrichtungen	K Kathodenbügel
R Anodenring	A Gasabsaugrohr	G Gänge	S Schliff

2. Versuchsergebnisse

Wir verwendeten Wolfram- und Nickelnkathoden. Es ergab sich weitgehende Übereinstimmung mit den in der Literatur angegebenen Bildern dieser Metalle. Es trat nur eine ziemliche Granulation des Bildes auf, die sich mit zunehmender Beobachtungsdauer verstärkte. Dabei traten ab und zu leuchtende Einzelpunkte in Erscheinung, deren Anzahl vom Emissionsstrom stark abhängig war. Der Großteil dieser Punkte besaß eine einfache runde Form. Neben diesen traten auch Doppelpunkte und solche in Gestalt vierblättriger Kleeblätter auf. Die Größe der einfachen Punkte auf dem Leuchtschirm betrug rund 2 mm, die der zwei- und vierfachen 3 mm bis 6 mm. Es ergaben sich also jene Erscheinungen, die von E. W. MÜLLER [1] erstmalig durch Aufdampfen von Kupferphthalocyamin, später von R. HAEFER [2] auch mit anderen Substanzen erhalten wurden. Die Zahl der Lichtpunkte zeigte sich in der Umgebung der [011]-Richtung stark vermindert. Eine leichte Verminderung konnte auch in den [112]- und [123]-Richtungen beobachtet werden. Mit zunehmender Versuchsdauer vermehrte sich die Zahl der Lichtpunkte und es entstanden anfangs selten, später häufiger, verhältnismäßig große, intensiv leuchtende Bildpunkte. In der allernächsten Umgebung des hellsten Lichtpunkts bildeten sich schwächer leuchtende, deren Anzahl sich fortschreitend vergrößerte. Die Helligkeit des übrigen Schirmbildes nahm langsam ab. Plötzlich erfolgte dann eine Zusammenballung der dunklen Umgebungspunkte mit dem hellen Zentralpunkt. Der so entstandene Leuchtfleck leuchtete nun allein weiter. Sein Durchmesser betrug anfangs etwa 1/2 cm und nahm rasch auf 2 cm bis 3 cm zu. Während normalerweise zur Beob-

achtung des reinen Wolframbildes eine Spannung von etwa 5 kV nötig war, mußte nun mit der Spannung auf zirka 2 kV zurückgegangen werden, um eine Spitzenzerstörung zu vermeiden. Wurde die Spannung in ihrer alten Höhe belassen, so erfolgte in kurzer Zeit ein plötzliches Aufleuchten des Leuchtschirms und jegliche Emission war beendet. Die mikroskopische Untersuchung derartig zerstörter Spitzen ergab schmelzperlenartige Gebilde von etwa $3\ \mu$ bis $5\ \mu$ Durchmesser. Eine ähnliche Erscheinung hat R. HAEFER [2] mit Feldemissionsröhren erhalten, die schon für mehrere Aufdampfversuche verwendet worden waren und deren innere Wände daher mit einer dünnen Schichte aus den organischen Versuchssubstanzen bedeckt waren.

Die Eigenschaften des sich ausbildenden Emissionszentrums wurden von uns an Wolfram- und Molybdänkathoden näher untersucht. Dabei stellte es sich heraus, daß der Leuchtfleck eine eigenartige, ruckartig mit der Zeit sich ändernde Struktur aufwies. Es schien, als ob das bilderzeugende Objekt auf der Spitzenkalotte eine Art Rotation um sich selbst ausführte, ohne dabei seinen Platz zu verlassen. Die Geschwindigkeit dieses Strukturwechsels nahm bei Erhöhung der Feldstärke zu und betrug je nach ihrer Höhe zwischen 2 und 20 Bildwechseln in der Sekunde. Durch Verwendung eines *R-Biotars* und höchstempfindlichen Filmmaterials gelang es, Momentaufnahmen mit Belichtungsdauern von $1/50$ bis $1/100$ sec zu machen. Die Abb. 2 und 3 zeigen einige charak-

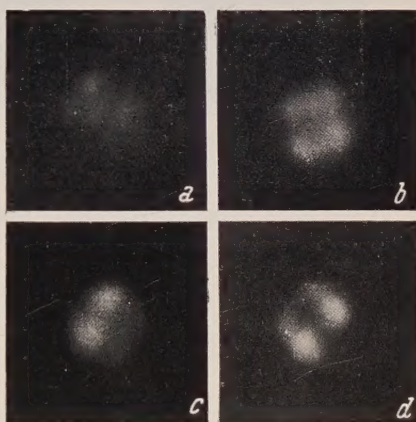


Abb. 2 a bis d. Einige charakteristische Strukturphasen eines Leuchtflecks



Abb. 3 a bis c. Einige charakteristische Strukturphasen eines Leuchtflecks

teristische Strukturphasen von Leuchtflecken. Bemerkenswert ist es, daß auch hier, ebenso wie bei den eingangs beschriebenen Bildpunkten, oft eine zwei- und vierfache Symmetrie auftritt, während andere Symmetrien nicht beobachtet werden.

Aufschlußreich scheinen die folgenden Beobachtungen zu sein. Nach der Entstehung eines Leuchtflecks wurde dieser unter ziemlich niedriger Spannung (zirka 2 kV) beobachtet und dabei die Temperatur der Spitze durch Aufheizen des Kathodenbügels langsam gesteigert. Bei einigen hundert Grad C verfiel der Leuchtfleck gleichsam in Stücke, die eng beieinander blieben und den eingangs erwähnten Zweier- und Viererpunkten zum Teil äußerst ähnlich waren (Abb. 4).

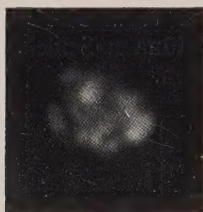


Abb. 4. Zerfall eines Leuchtflecks (Wolframkathode)

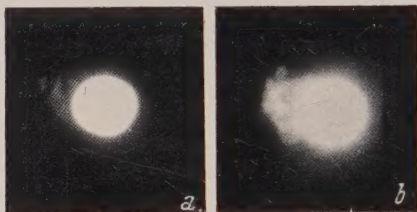


Abb. 5. Zerfall eines Leuchtflecks (Molybdänkathode)
a Anfangsstadium b späteres Stadium

Eine ähnliche Erscheinung wurde bei einer Molybdänkathode beobachtet. Als nach der Bildung des Leuchtflecks die Hochspannung etwas gesteigert wurde, wurden plötzlich auf der einen Seite des Leuchtflecks, gleichsam als abgesprengte Bruchstücke, einzelne strukturierte kleine Bildpunkte sichtbar, ähnlich denen, die zur Entstehung des Leuchtflecks geführt hatten (Abb. 5 a). Diese Erscheinung verstärkte sich mit der Zeit (Abb. 5 b). Diese beiden Aufnahmen wurden unter starker Überbelichtung erhalten, um die weniger hellen kleinen Punkte sichtbar zu machen. Der Leuchtfleck erscheint daher strukturlos.

Alle bisher angeführten Tatsachen geben Anlaß zu der Vermutung, daß das den Leuchtfleck hervorrufende Objekt eine Anhäufung aus den Objekten darstellt, die die ein-, zwei- und vierfachen Punkte hervorrufen.

Um Aufschlüsse über die Größe des den Leuchtfleck hervorrufenden Objekts zu erhalten, wurden Strom-Spannungskennlinien beim Auftreten dieser Erscheinung aufgenommen. Wurden die dabei erhaltenen Meßwerte im Diagramm $1/U$ gegen $\log I/U^2$ aufgetragen (U -Spannung zwischen Spitze und Anode, I Emissionsstrom), so ergaben sich aus den Achsenabschnitten der dabei entstehenden Geraden unter Anwendung der Feldemissionsgesetze von SOMMERFELD und BETHE [3] Werte in der Größe von einigen 10 \AA^2 .

3. Diskussion und Versuch einer Deutung der Versuchsergebnisse

Die Zweier- und Viererpunkte wurden, wie schon erwähnt, von E. W. MÜLLER [1] beim Aufdampfen von Kupferphthalocyaminmolekeln erhalten und von ihm als „Bilder“ von einzelnen Molekülen dieser Substanz bezeichnet. Die Moleküle von Cu-Phthalocyamin enthalten nämlich vier Benzolringe, die im Viereck angeordnet sind. Für flach auf-

liegende Moleküle würde sich also ein vierfacher, für aufrechtstehende ein zweifacher Bildpunkt ergeben. Spätere Versuche von R. HAEFER [2] mit einer größeren Zahl organischer Verbindungen ohne vierzählige Symmetrie der Struktur brachten aber neben einfachen auch zwei- und vierfach strukturierte Bildpunkte. Man versuchte dies durch die Annahme zu erklären, daß die Versuchssubstanzen durch Elektronen- und Ionenbombardement umgewandelt würden. Doch erscheint es unwahrscheinlich, daß bei den neu entstandenen Molekülen nur solche mit zwei- und vierzähliger Symmetrie auftreten sollten. Ein anderer Erklärungsversuch geht dahin, daß man annimmt, daß die aufgedampften Moleküle auf der Spitzenkalotte einen Kristalliten bilden und damit einen Ort erhöhter Feldstärke, von dem aus verstärkte Emission erfolgt. Für diese Erklärung spricht vor allem die Tatsache, daß strukturierte Bildpunkte nur bei Bedampfung unter Feldeinwirkung auftreten. Aber auch hier tritt die gleiche Schwierigkeit auf wie bei der zuerst erwähnten Erklärung. Schwer verständlich bleibt unter diesen Gesichtspunkten auch die große Temperaturbeständigkeit der Erscheinung, denn die Zweier- und Viererpunkte verschwinden erst bei einer Temperatur von zirka 1000° K.

Als weiteren Erklärungsversuch möchten wir folgendes vorschlagen. Es ist sicher anzunehmen, daß im Versuchsrohr bei Aufdampfversuchen mit organischen Substanzen ständig eine gewisse Zahl organischer Ionen vorhanden sein wird, die durch die auf den Leuchtschirm auftreffenden Elektronen von diesem abgerissen werden. Die positiven Ionen werden mit einer Energie, die vom angelegten Feld abhängig ist und einige 10^3 eV beträgt, auf der Spitzenkalotte ankommen. Dort werden sie bevorzugt an Stellen erhöhter Lokalfeldstärke, an Gittertreppenstufen oder an adsorbierten Atomen auftreten. Durch dieses Bombardement können Wolframatomte vom Gitter losgerissen werden. Daß dies energetisch möglich ist, läßt sich durch Berechnung der Ablösearbeit von Atomen aus dem eigenen Kristallgitter nach der Methode von STRANSKI und SUHRMANN [4] zeigen. Man kommt für Wolframatomte in der Halbkristallage zu einem Wert von 8,7 eV. Wenn also Ionen mit einer Energie von einigen 10^3 eV auftreten, so ist die Möglichkeit des Herausgeschlagens von Wolframatomten durchaus gegeben. Die aus dem Gitterverband gelösten Atome werden nun teils in den Gasraum gelangen, andere aber werden an der Gitteroberfläche adsorbiert und erhöhen so an diesen Stellen die lokale Feldstärke. Dadurch erhöht sich die Zahl der dort auftreffenden Ionen und damit wieder die Zahl der herausgeschlagenen Atome.

Nun haben HENDUS [5] und RICHTER [6] bei nicht zu hoch erhitzten Metallschmelzen gefunden, daß die Metallatome dabei nicht völlig regellos orientiert sind, sondern daß eine gewisse Nahorientierung vorliegt. Diese besteht darin, daß die Atome von einer Anzahl nächster Nachbarn umgeben sind, deren Anzahl gleich der Koordinatenzahl im Kristallgitter ist. Diese Gruppen von Atomen behalten während der Kristallisation ihren Ordnungszustand bei und bauen so durch bloßes

Aneinanderreihen den Kristall auf. Man nennt sie daher Zwischenbausteine. Sie wurden durch FOURIER-Analysen von Röntgenaufnahmen nachgewiesen. Derartige Zwischenbausteine wurden auch von KÖNIG [7] beim Aufdampfen dünnster Metallschichten auf gekühlte Träger gefunden. Durch Auswertung von Elektronenbeugungsbildern dieser Schichten kam er zu dem Ergebnis, daß dünnste kondensierte Metallschichten sich außer aus größeren Kristalliten aus einem Pulver von Zwischenbausteinen aufbauen. Für die kubisch-raumzentrierten Metalle Eisen und Chrom fand KÖNIG kubisch-raumzentrierte Elementarzellen. Für kubisch-flächenzentrierte Metalle werden Vierzehnflache vermutet.

Es erscheint nun also durchaus annehmbar, daß die durch das Ionenbombardement aus der Spitzenoberfläche herausgeschlagenen und auf der obersten Gitternetzebene liegenden Anhäufungen von Metallatomen im Zustand der oben genannten Zwischenbausteine existieren. Nehmen wir mit Rücksicht auf die kubisch-raumzentrierte Struktur von Wolfram und Molybdän kubisch-raumzentrierte Elementarzellen als Zwischenbausteine dieser Substanzen an, so könnte man die Zweier- und Viererpunkte als „Bilder“ von besonders exponierten Zwischenbausteinen ansprechen. Die zwei- und vierzähligen Formtypen lassen sich durch verschiedene Lage der Zwischenbausteine erklären, die verschiedene Größe und Helligkeit durch deren verschiedene Exponiertheit. Das Fehlen von dreizähligen Punkten entsprechend der Raumdiagonalen des Zwischenbausteines senkrecht zur Spitzenoberfläche dürfte auf Überstrahlung der drei Randscheibchen durch das hellere Zentralscheibchen zurückzuführen sein. Die starke Zunahme der Bildpunkte mit dem Emissionsstrom wäre durch verstärktes Ionenbombardement verständlich. Das stark verminderte Auftreten von Lichtpunkten in der Umgebung der $[011]$ -Richtung ließe sich nach Berechnungen von STRANSKI und SUHRMANN [4] durch die Tatsache erklären, daß relativ zu den anderen Kristallflächen bei der (011) -Fläche die für das Herausbrechen eines Atoms nötige Arbeit am größten ist. Die große Temperaturbeständigkeit der die Lichtpunkte hervorrufenden Objekte wäre, da es sich ja um Wolfram handelte, leicht einzusehen. Als Ursache für die Entstehung des vordem beschriebenen hellen Leuchtflecks könnte eine Anhäufung von Zwischenbausteinen angesehen werden. Für diese Annahme scheint die Art seiner Entstehung, sowie die vorhin beschriebene Zerspaltung in Einzelpunkte zu sprechen. Diese Tatsachen zeigen, daß das den Leuchtfleck hervorrufende Objekt aus den Objekten aufgebaut sein muß, die die einfachen, zwei- und vierfachen Bildpunkte erzeugen. Für die zeitliche Änderung der Struktur des Leuchtflecks ist das Ionenbombardement verantwortlich, welches die zusammengeballten Zwischenbausteine ständig umgruppiert und so die ruckartige Bewegung bewirkt. Mit Zunahme der Feldstärke verstärkt sich das Ionenbombardement und damit die beobachtete Zunahme der Geschwindigkeit der Strukturänderung. Wurde, wie vorher beschrieben, die Spannung zwischen Spitze und Kathode nach Entstehen des Leuchtflecks nicht vermindert, so wurde die Spitze durch Abschmelzen zer-

stört. Dabei blieb das den Leuchtfleck verursachende Objekt auf der Spitzenkalotte solange erhalten, bis diese selbst durch die Stromwärme zerstört wurde. Das weist darauf hin, daß dieses Objekt aus einem Stoff besteht, der so hoch schmelzend ist wie die Spitze selbst. Auch die aus den Strom-Spannungskennlinien berechnete Größe des Objekts scheint durchaus mit der Vorstellung von Zwischenbausteinen verträglich.

Für wertvolle Anregung und Unterstützung danken wir Herrn Prof. E. SCHMID und Herrn Dozent K. LINTNER. Die Arbeit wäre nicht durchführbar gewesen ohne die Mitarbeit und die großzügige Unterstützung durch die Wiener Radiowerke A.-G.

Literatur

1. E. W. MÜLLER, ZS. f. Naturf. **5** a, 473 (1950).
2. R. HAEFER, Acta Phys. Austr. **8**, 105 (1953).
3. A. SOMMERFELD und H. BETHE, Handbuch d. Physik **24/2**, 441 (1933).
4. I. N. STRANSKI und R. SUHRMANN, Ann. d. Physik **1**, 153 (1947).
5. H. HENDUS, Z. Phys. **119**, 265 (1942).
6. H. RICHTER, Phys. Z. **44**, 406 (1942).
7. H. KÖNIG, Optik **3**, 201 (1948).

Zur Methode der stationären Phase

Von

Günther Braun, Wien

zur Zeit wissenschaftlicher Mitarbeiter am Philips Forschungslaboratorium
N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken Eindhoven-Niederlande

Mit 3 Abbildungen

(Eingelangt am 22. Januar 1955)

Zusammenfassung

Es wird im Anschluß an VAN DER CORPUT [1] und E. HLAWKA [2] die Methode der stationären Phase zur Ableitung von für $\omega \rightarrow \infty$ asymptotischer Reihen für die Auswertung von Integralen der Form $\int g(x_i) e^{i\omega f(x_i)} dx_i$ benützt. Dabei bedeuten die x_i ($i \dots 1, 2, \dots, n$) kartesische Koordinaten, dx_i das Volumelement im R_n und das Integral ist über einen geeignet zu wählenden Körper im R_n zu erstrecken. ω sei reell, positiv. $f(x_i)$, $g(x_i)$ sind Funktionen der Variablen x_i , die geeignet zu wählenden Bedingungen genügen.

Da für physikalische Anwendungen in der Beugungstheorie [3] speziell die Integrale für $n = 1$ und $n = 2$ von Bedeutung sind und da für $n > 2$ die mathematischen Schwierigkeiten sehr groß werden, beschränkt sich diese Arbeit auf Integrale vom Typus

$$\int_a^b g(x) e^{i\omega f(x)} dx \quad \text{und} \quad \iint g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy,$$

wobei im ersten Falle über die reelle x -Achse, im zweiten Falle über ein endliches Gebiet der x, y -Ebene zu integrieren ist.

Satz I

VAN DER CORPUT [1] hat bewiesen, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ das Integral

$$J = \int_a^b g(x) e^{i\omega f(x)} dx \quad (1)$$

wobei $f(x)$ und $g(x)$ reelle oder komplexe Funktionen der reellen Variablen x sind, a, b , reell und endlich sind und über die reelle x -Achse integriert wird, einen Näherungswert \bar{J} besitzt, der nur vom Verhalten

von f und g in der Nähe endlich vieler Punkte von $[a, b]$ abhängt. Zu diesen Punkten gehören die Endpunkte a, b des Intervalles und alle Punkte x_i von (a, b) , für die

$$\operatorname{Re} \frac{f'(x)}{\sqrt{f''(x)}} \neq 0 \quad \text{ist und in denen} \quad \operatorname{Im} \frac{f'(x)}{\sqrt{f''(x)}}$$

das Vorzeichen wechselt. [Führende Punkte der Funktion $f(x)$ in (a, b) .]

Der Näherungswert stellt sich dabei in der Form $\bar{J} = A + B + \sum V$,

dar, wobei die Größe A eindeutig bestimmt ist durch $f(a)$, $g(a)$ und die Ableitungen $f'(a)$, $g'(a)$, $f''(a)$, $g''(a)$... (bis zu einer bestimmten Ordnung), analog B und V . Die Methode der führenden Punkte reduziert sich im Falle, daß $f(x)$ rein imaginär ist auf die Methode der stationären Phase (STOKES, KELVIN, 1887). Wir betrachten im folgenden allein diesen Spezialfall.

Satz II. [2]

Es seien in $[a, b]$ zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ definiert, $f(x)$ reell, $g(x)$ reell oder komplex, a, b reell, endlich. Es seien $f(x)$, bzw. $g(x)$ $(n+2)(k+1)$, bzw. $(n+1)(k+1)$ mal stetig differenzierbar (für a, b brauchen nur die rechts-, bzw. linksseitigen Grenzwerte der Ableitungen zu existieren). k natürlich beliebig. Für $x = a$ gelte $f^{(k)}(a) = 0$ für $1 \leq k < n_a$, $f^{(n_a)}(a) \neq 0$, für $x = b$ gelte $f^{(k)}(b) = 0$ für $1 \leq k < n_b$, $f^{(n_b)}(b) \neq 0$, $n = \max(n_a, n_b)$. In (a, b) sei $f'(x) \neq 0$. ω sei reell positiv (≥ 1), $g(x)$ enthalte ω nicht.

Dann hat das Integral

$$J = \int_a^b g(x) e^{i\omega f(x)} dx \quad (2)$$

einen Näherungswert \bar{J} , der sich in der Form

$$\bar{J} = A + B + O(\omega^{-(k+2)/n}) \quad (3)$$

darstellt; A hängt nur von $g^{(i)}(a)$, $f^{(j)}(a)$ ab mit $0 \leq i \leq (k+1)(n_a+1)$, $0 \leq j \leq (k+1)(n_a-2)$, analog B . A und B haben explizit die Form mit $\omega \rightarrow \infty$ asymptotischer Reihen, die nach Potenzen von $\omega^{-(j+1)/n_a}$, bzw. $\omega^{-(j+1)/n_b}$ fortschreiten.

Es ist $(k+1)(n_a+1)$

$$A = \sum_{j=0}^{(k+1)(n_a+1)} A_j \cdot \omega^{-(j+1)/n_a} + O(\omega^{-(k+2)/n_a}) \quad (4)$$

mit

$$A_j = \frac{1}{n_a} e^{i\omega f(a)} \sum_{t=0}^j l_{j+n_a t}(a) \cdot i^t \frac{\Gamma[(j+n_a t+1)/n_a]}{\Gamma[j+n_a t+1]} \cdot e^{\pm i\pi(j+n_a t+1)/2n_a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n_a!} |f^{(n_a)}(a)|\right)^{(j+n_a t+1)/n_a}} f^{(n_a)}(a) \geq 0 \quad (5)$$

Die einzelnen Größen bedeuten:

$$l_{t,s}(a) = \sum_{\substack{l=(n_a+1)t \\ r=m-n_a}}^s \binom{s}{l} g^{(s-l)}(a) \cdot K_{t,l}(a)$$

$$K_{t+1,m+1}(a) = \sum_{r=(n_a+1)t}^m \binom{m}{r} f^{(m-r+1)}(a) \cdot K_{t,r}(a) \quad (6)$$

wobei $l_{t,s}(a) = 0$ ist für $t > \left\lfloor \frac{s}{n_a + 1} \right\rfloor$, $l_{0,s}(a) = g^{(s)}(a) \cdot \left\lfloor \frac{s}{n_a + 1} \right\rfloor$ ist die größte ganze Zahl $\leq \frac{s}{n_a + 1}$. Ferner ist $K_{0,0}(a) = 1$, $K_{0,m} = 0$ für $m \geq 1$, $K_{t,m} = 0$ für $t > \left\lfloor \frac{m}{n_a + 1} \right\rfloor$.

Für B erhalten wir analoge Formeln, wenn in (4) statt $A \rightarrow B$, $A_j \rightarrow B_j$, $n_a \rightarrow n_b$ geschrieben wird, in (5) statt $n_a \rightarrow n_b$, $f(a) \rightarrow f(b)$, $l_{t,j+n_a t}(a) \rightarrow (-1)^j \cdot l_{t,j+n_b t}(b) \cdot D(j + n_b t, n_b)$. Dabei bedeutet

$$D(m, n_b) = \begin{cases} e^{\pm i(m+1)\pi}, & \text{wenn } n_b \text{ gerade} \\ e^{\pm i(m+1)\pi \left(1 - \frac{1}{n_b}\right)}, & \text{wenn } n_b \text{ ungerade} \end{cases} \quad (7)$$

(\pm je nachdem, ob $f^{(n_b)}(b) \geq 0$) und die Größen $l_{t,s}(b)$, bzw. $K_{t,s}(b)$ entstehen aus $l_{t,s}(a)$, bzw. $K_{t,s}(a)$ durch Vertauschen $a \rightarrow b$, $n_a \rightarrow n_b$.

Ein Integral, das nur die Bedingung $f'(x) \neq 0$ in (a, b) nicht erfüllt (bei dem vielmehr in endlich vielen Punkten von (a, b) $f'(x) = 0$ ist) und für die Endpunkte a, b etwa n_a , bzw. n_b gleich 1 ist, kann leicht durch Unterteilung des Integrationsintervalles auf den früheren Fall zurückgeführt werden.

Zum Beweis von Satz II. wählen wir mit zwei geeigneten positiven Konstanten C, \bar{C} zwei Größen

$$\varepsilon_a = C \omega^{-\frac{1}{n_a+1}} \quad \varepsilon_b = \bar{C} \omega^{-\frac{1}{n_b+1}} \quad (8)$$

und definieren für alle $x \geq 0$ eine Funktion $w(x)$ durch

$$w(x) = \begin{cases} \int_x^1 e^{-1/t - 1/(1-t)} dt / \int_0^1 e^{-1/t - 1/(1-t)} dt & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad (9)$$

$w(x)$ ist beliebig oft stetig differenzierbar, es gilt für alle $j \geq 0$

$$\left. \frac{d^j}{dx^j} (1 - w(x)) \right|_{x=0} \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{d^j w(x)}{dx^j} \right|_{x=1} = 0$$

Die Funktion $w(x)$, die wir nach VAN DER CORPUT Neutralisator nennen, ermöglicht es in bequemer Weise, den Beitrag der Randpunkte a, b

zu berechnen und den Beitrag des Restintervalles nach oben abzuschätzen. Wir setzen:

$$N_a(x) = w \left(\frac{x-a}{\varepsilon_a} \right) \quad ; \quad N_b(x) = w \left(\frac{b-x}{\varepsilon_b} \right). \quad (10)$$

$N_a(x)$ hat die Eigenschaften

$$\left. \frac{d^j}{dx^j} (1 - N_a(x)) \right|_{x=a} = 0; \quad \left. \frac{d^j N_a(x)}{dx^j} \right|_{x=a+\varepsilon_a} = 0 \quad j \geq 0 \quad (11)$$

$$N_a'(x) = O(\varepsilon_a^{-j}) \quad \text{für} \quad [a, a + \varepsilon_a]; \quad N_a(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x > a + \varepsilon_a$$

analog $N_b(x)$. Für das Folgende müssen wir zuerst $f'(x)$ nach oben abschätzen. Mit Hilfe des LEGENDRESCHEN Ausdruckes für das Restglied der TAYLOR-Reihe ergibt sich:

$$|f'(x)| \geq \begin{cases} \frac{1}{n_a!} (x-a)^{n_a-1} |f^{(n_a)}(a)| & \text{für} \quad [a, a + \varepsilon_a] \\ \frac{1}{n_b!} (b-x)^{n_b-1} |f^{(n_b)}(b)| & \text{für} \quad [b - \varepsilon_b, b] \\ \text{Min} \left\{ \frac{1}{n_a!} \varepsilon_a^{n_a-1} |f^{(n_a)}(a)|, \frac{1}{n_b!} \varepsilon_b^{n_b-1} |f^{(n_b)}(b)|, \text{Min} |f'(x)|_{(a+\varepsilon_a, b-\varepsilon_b)} \right\} & \text{für} \quad [a + \varepsilon_a, b - \varepsilon_b] \end{cases} \quad (12)$$

Dabei ergeben sich die ersten beiden Abschätzungen einfach durch entsprechende Wahl von C, \bar{C} .

Wir schreiben (1) in der Gestalt

$$J = \int_a^b g(x) e^{i\omega f(x)} dx = \int_a^{a+\varepsilon_a} N_a(x) \cdot g(x) e^{i\omega f(x)} dx + \\ + \int_{b-\varepsilon_b}^b N_b(x) \cdot g(x) e^{i\omega f(x)} dx + \int_a^b H(x) e^{i\omega f(x)} dx \quad (13)$$

wobei

$$H(x) = g(x) \{1 - N_a(x) - N_b(x)\} \quad (14)$$

ist und (11) berücksichtigt wurde. Die Integrale sind der Reihe nach die Anteile A, B, J_R (Restterm).

Wir schätzen zuerst J_R ab. $H(x)$ ist in $[a, b]$ genügend oft stetig differenzierbar und hat ferner die folgenden Eigenschaften:

$$H^{(j)}(a) = 0; \quad H^{(j)}(b) = 0 \\ H^{(j)}(x) = \begin{cases} O(\varepsilon_a^{-j}) & \text{in} \quad [a, a + \varepsilon_a] \\ O(\varepsilon_b^{-j}) & \text{in} \quad [b - \varepsilon_b, b] \\ O(\text{Max}(\varepsilon_a^{-j}, \varepsilon_b^{-j})) & \text{in} \quad [a + \varepsilon_a, b - \varepsilon_b] \end{cases} \quad (15)$$

Man zeigt dies am einfachsten etwa für $[a, a + \varepsilon_a]$ aus der Formel

$$H^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} g^{(j-k)}(x) \frac{d^k}{dx^k} \left(1 - N_a(x) \right) \quad (16)$$

mit Hilfe von $g^{(j-k)}(x) = O(1)$ (g stetig differenzierbar auf beschränktem Intervall) und (11). Für $[b - \varepsilon_b, b]$ gilt das Analoge, für $[a + \varepsilon_a, b - \varepsilon_b]$ ist die Behauptung evident.

Wir definieren ein Funktionensystem $H_i(x)$ rekursiv durch die Gleichungen

$$H_0(x) = H(x); \quad H_{i+1}(x) = -\frac{d}{dx} \left[\frac{H_i(x)}{f'(x)} \right] \quad (17)$$

dann gilt, wie man durch vollständige Induktion zeigen kann, die Formel

$$H_i(x) = \sum_{j=0}^i H^{(j)}(x) \cdot [f'(x)]^{j-2i} \cdot C_{ij} [f'(x) \dots f^{(i+1)}(x)] \quad (18)$$

wobei C_{ij} ein Polynom höchstens in seinen Argumenten ist, wie man durch Aufschreiben der Rekursionen für die C_{ij} sofort einsieht.

$H_i(x)$ ist wieder stetig differenzierbar (Grenzwert von $H^{(j)}(x) \cdot (f')^{j-2i}$ für $x = a$ und $x = b$ für $0 \leq j \leq i$ kann per definitionem gleich 0 gesetzt werden) und es ist $H_i(a) = H_i(b) = 0$. Wie man durch Einsetzen in die Rekursionen für die C_{ij} sofort zeigen kann, gilt für die C_{ij} in $[a, a + \varepsilon_a]$ $C_{ij} = O(\varepsilon_a^{(n_a - 2)(i-j)})$. Daraus und aus (15), (18) folgt für $[a, a + \varepsilon_a]$

$$H_i(x) = O(\varepsilon_a^{-n_a i}) \quad (19)$$

analog für $[b - \varepsilon_b, b]$. Da in $[a + \varepsilon_a, b - \varepsilon_b]$ $H_i(x)$ höchstens ebenso stark mit $\omega \rightarrow \infty$ gegen ∞ gehen kann wie in $[a, a + \varepsilon_a]$, $[b - \varepsilon_b, b]$ muß in $[a, b]$

$$H_i(x) = O(\omega^{ni/(n+1)}) \quad (20)$$

sein mit $n = \max(n_a, n_b)$.

J_R wird durch fortgesetzte partielle Integration umgeformt:

$$J_R = \int_a^b H(x) e^{i\omega f(x)} dx = (i\omega)^{-j} \int_a^b H_j(x) e^{i\omega f(x)} dx = O(\omega^{-j/(n+1)}) \quad (21)$$

Dabei kommen in $H_j(x)$ wegen (18) noch alle Ableitungen von g bis zur j -ten und von f bis zur $(j+1)$ -ten vor. (21) nimmt schließlich mit

der Substitution $j = \frac{n+1}{n} (k+2)$ die Form $J_R = O(\omega^{-(k+2)/n})$ an.

Zur Berechnung der Größe

$$A = \int_a^{a+\varepsilon_a} N_a(x) g(x) e^{i\omega f(x)} dx \quad (22)$$

führen wir die Substitutionen

$$p(x) = f(a) + \frac{1}{n_a!} f^{(n_a)}(a) \cdot (x - a)^{n_a}; \quad L(x) = N_a(x) \cdot g(x) e^{i\omega[f(x) - p(x)]} \quad (23)$$

durch, wodurch

$$A = \int_a^{a + \varepsilon_a} L(x) e^{i\omega p(x)} dx \quad (24)$$

wird.

Es gilt ferner in $[a, a + \varepsilon_a]$

$$\frac{d^j}{dx^j} \{N_a(x) g(x)\} = O(\varepsilon_a^{-j}) = O(\omega^{j/(n_a + 1)}) \quad (25)$$

und wie man aus

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n_a - 1)!} (x - a)^{n_a + 1} f^{(n_a + 1)}[a + \vartheta(x - a)] \quad 0 \leq \vartheta \leq 1 \quad (26)$$

ersieht:

$$f^{(s)}(x) - p^{(s)}(x) = O[\varepsilon_a^{Max[n_a + 1 - s, 0]}]; \quad \begin{aligned} f^{(s)}(a) - p^{(s)}(a) &= 0 & s \leq n_a \\ &\neq 0 & s > n_a \end{aligned} \quad (27)$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich aus

$$\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} e^{i\omega(f-p)} = i\omega \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{d^k}{dx^k} e^{i\omega(f-p)} [f^{(j-k+1)}(x) - p^{(j-k+1)}(x)] \quad (28)$$

$$\frac{d^j}{dx^j} e^{i\omega(f-p)} = O(\omega^{j/(n_a + 1)}); \quad L^{(j)}(x) = O(\omega^{j/(n_a + 1)}) \quad (29)$$

(24) wird durch partielle Integration ausgewertet, wobei bei jeder Integration der erste Faktor (hier $L(x)$) differenziert und der zweite Faktor (hier $e^{i\omega p(x)}$) integriert wird. Zur Durchführung dieser Integration brauchen wir ein Funktionensystem $\psi_\mu(z)$, so daß

$$\psi_0(z) = e^{i\omega p(z)}; \quad \psi_{\mu+1}'(z) = -\psi_\mu(z) \quad (30)$$

gilt. Es muß daher sein

$$\psi_{\mu+1}(z) = - \int_{c_1}^z \psi_\mu(\xi) d\xi + \psi_{\mu+1}(c_1). \quad (31)$$

Dabei kann ξ komplex, c_1 ein beliebiger Punkt der funktionentheoretischen Ebene sein, nur muß der Integrationsweg so gelegt werden, daß darauf der Integrand eindeutig und analytisch ist. Wenn man

nämlich etwa das Integral (24) durch partielle Integration auswertet, ist die Größe c_1 in der Formel

$$\int_a^x L(\xi) e^{i\omega p(\xi)} d\xi = L(x) \int_{c_1}^x e^{i\omega p(\xi)} d\xi \bigg|_{\xi=a}^{\xi=x} - \int_a^x L'(\xi) d\xi \int_{c_1}^{\xi} e^{i\omega p(\xi)} d\xi \quad (32)$$

noch vollkommen beliebig. Wir wählen für c_1 einen geeignet gewählten unendlich fernen Punkt der funktionentheoretischen Ebene, für den alle $\psi_\mu(z) = 0$ sind.

Für das Folgende [I] müssen Integrale vom Typus

$$J(u) = \int_{W_q(u)} Q(z) e^{q(z)} dz \quad (33)$$

betrachtet werden ($q(z)$, $Q(z)$ Polynome, $q(z) \neq \text{const.}$, u ein Punkt der komplexen z -Ebene). $W_q(u)$ ist die Bildkurve der Geraden $\text{Im } w = 0$, $\text{Re } w < 0$ mit $\text{Re } w = -\infty$ als Anfangspunkt und $\text{Re } w = 0$ als Endpunkt. $w(z)$ bezeichnet

$$w(z) = q(z) - q(u) \quad (34)$$

Wir betrachten die RIEMANNSCHE Fläche der zu $w(z)$ inversen Funktion $z(w)$. Wenn $q(z)$ ein Polynom vom Grade n ist, ist $z(w)$ im allgemeinen auf der w -Ebene n -deutig, eindeutig nur auf der RIEMANNSCHEN Fläche der Funktion $z(w)$. Diese ist im allgemeinen n -blättrig. $z(w)$ hat im Endlichen Verzweigungspunkte von den Gesamtordnungen $n - 1$, die durch die Gleichungen

$$q'(z) = 0; \quad z = \alpha_i; \quad w_i = w(\alpha_i) \quad (35)$$

bestimmt werden. Der Integrationsweg in w ist unter Vermeidung der Verzweigungspunkte zu führen. Dies ist sicher möglich, wenn wir u auf die offene Menge der z -Ebene beschränken, die von der Gesamtebene übrig bleibt, wenn wir die Menge, die aus den Punkten (35) und den Punkten β mit $\text{Im } q(\alpha_i) < \text{Im } q(\beta)$; $\text{Re } q(\alpha_i) \leq \text{Re } q(\beta)$ besteht, eliminieren.

Unter diesen Bedingungen ist $Q(z(w)) \frac{e^{w}}{q'(z(w))}$ auf dem Integrationsweg eindeutig und analytisch und verschwindet für $\text{Re } w \rightarrow -\infty$.

Es seien u und v zwei benachbarte Punkte der angegebenen offenen Menge. Dann können wir den CAUCHYSCHEN Integralsatz anwenden.

$$\int_{W_q(u)} Q(z) e^{q(z)} dz - \int_{W_q(v)} Q(z) e^{q(z)} dz = \int_u^v Q(z) e^{q(z)} dz \quad (36)$$

Wir legen den Punkt u auf eine durch den Punkt α_i gehende Gerade

$$u = \alpha_i + r e^{i\varphi} \quad (37)$$

und bestimmen den (im allgemeinen für $n > 1$ von q abhängigen) Grenzwert:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{W_q(\alpha_i + re^{i\varphi})} Q(z) e^{q(z)} dz \quad (38)$$

Für alle möglichen Punkte u definieren wir

$$\psi_0(u) = e^{q(u)} \quad \psi_{\mu+1}'(u) = -\psi_\mu(u) \quad (39)$$

Durch Anwendung von (36) und mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung sieht man leicht, daß (für $\alpha_i = 0$, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet) die Darstellung

$$\psi_{\mu+1}(u) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_{W_q(u)} (z-u)^\mu e^{q(z)} dz \quad (40)$$

gilt.

Im Spezialfall $q(z) = C e^{iq} z^n$ existiert für $z = 0$ ein Verzweigungspunkt der Ordnung $n-1$; durch die Abbildung $z = z(q)$ wird die q -Ebene mit Ausnahme des Punktes $q = 0$ und der Geraden $\text{Im } q = 0$, $\text{Re } q > 0$ auf den Sektor

$$\frac{1}{n} \{2(m-1)\pi - \varrho\} \leq \arg z < \frac{1}{n} \{2m\pi - \varrho\} \quad (41)$$

abgebildet. u liege ebenfalls in diesem Sektor. Wir betrachten in diesem Sektor die Kurve

$$\text{Im } q(z) = \text{Im } q(u); \quad \text{Re } q(z) \leq \text{Re } q(u)$$

Für $u \rightarrow 0$ geht diese Kurve in die Gerade $\varrho + n \arg z = 2(m-1)\pi$ über und wir erhalten mit der Substitution

$$z = s e^{i \arg z} = s e^{\frac{i}{n} \{2(m-1)\pi - \varrho\}} \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_{W_q(re^{i\varphi})} (z - r e^{i\varphi})^\mu e^{C e^{iq} z^n} dz = \frac{e^{i(\mu+1) \frac{1}{n} [2(m-1)\pi - \varrho]} \cdot \Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)}{n \cdot C^{(\mu+1)/n} \cdot \Gamma(\mu+1)} \quad (42)$$

Wenn wir noch z durch $z + a$ ersetzen, auf

$$n = n_a; \quad \varrho = \pm \frac{\pi}{2}; \quad C = \omega \frac{1}{n_a!} |f^{(n_a)}(a)| \quad (43)$$

spezialisieren und $f(a)$ berücksichtigen, erhalten wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi_{\mu+1}(a + r e^{i\varphi}) = \frac{1}{n_a} e^{i\omega f(a)} \cdot e^{i(\mu+1) \frac{1}{n_a} \left[2(m-1)\pi \mp \frac{\pi}{2}\right]} \cdot \\ \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n_a}\right)}{\Gamma(\mu+1) \left[\omega \frac{1}{n_a!} |f^{(n_a)}(a)| \right]^{(\mu+1)/n_a}} f^{(n_a)}(a) \geq 0 \quad (44)$$

Speziell wird für $\varphi = 0$ $m = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ und daher

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi_{\mu+1}(a+r) = \psi_{\mu+1}(a^+) = \frac{1}{n_a} e^{i\omega f(a)} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n_a}\right)}{\Gamma(\mu+1)} \frac{e^{\mp i(\mu+1) \frac{\pi}{2n_a}}}{\left[\omega \frac{1}{n_a!} |f^{(n_a)}(a)|\right]^{(\mu+1)/n_a}} \quad (45)$$

$$\text{bzw. für } \varphi = \pi \quad m = \begin{cases} \frac{1}{2}(n_a+1) \pm \frac{1}{2} & n_a \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(n_a+1) & n_a \text{ ungerade} \end{cases} \quad f^{(n_a)}(a) \geq 0$$

und daher

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi_{\mu+1}(a-r) = \psi_{\mu+1}(a^-) = \psi_{\mu+1}(a^+) D(\mu, n_a) \quad (46)$$

wenn noch zusätzlich

$$D(\mu, n_a) = \begin{cases} e^{\pm i(\mu \pm 1)\pi} & n_a \text{ gerade} \\ e^{\pm i(\mu+1)\pi(1-1/n_a)} & n_a \text{ ungerade;} \end{cases} \quad f^{(n_a)}(a) \geq 0 \quad (47)$$

gesetzt wird.

Damit folgt für (24) durch partielle Integration

$$A = \int_a^{a+\varepsilon_a} L(x) e^{i\omega p(x)} dx = \int_a^{a+\varepsilon_a} L(x) \psi_0(x) dx = - \sum_{s=0}^K L^{(s)}(x) \psi_{s+1}(x) \Big|_{x=a+\varepsilon_a}^a + \int_a^{a+\varepsilon_a} L^{(k+1)}(x) \cdot \psi_{k+1}(x) dx \quad (48)$$

Wegen (11), (23) gilt für alle $s \geq 0$ $L^{(s)}(a + \varepsilon_a) = 0$. Aus (44) etc. folgt ferner $\psi_{\mu+1}(x) = O(\omega^{-(\mu+1)/n_a})$ für $[a, a + \varepsilon_a]$. Durch Abschätzung des Restintegrals in (48) erhält man

$$A = \sum_{s=0}^{(k+1)(n_a+1)} L^{(s)}(a) \cdot \psi_{s+1}(a^+) + O(\omega^{-(k+2)/n_a}) \quad (49)$$

wobei $K = (k+1)(n_a+1)$ gesetzt wurde.

Wir setzen ferner

$$P_l(a) = \frac{d^l e^{i\omega(f-p)}}{dx^l} \Big|_{x=a}$$

Dafür gelten (Beweis durch vollständige Induktion) die Rekursionen

$$P_{n+1}(a) = i\omega \sum_{r=0}^{n-n_a} \binom{n}{r} P_r(a) \cdot f^{(n-r+1)}(a) \quad (50)$$

P_r ist ein Polynom höchstens vom Grade $\left[\frac{r}{n_a+1}\right]$, denn $f(x) - p(x)$

hat für $x = a$ eine $n_a + 1$ -fache Nullstelle, das k -te Glied in der TAYLOR-Entwicklung von: $e^{i\omega \cdot (f(x) - p(x))}$ beginnt also mit $(x - a)^{k(n_a + 1)}$, die r -te Ableitung daher mit $(x - a)^{k(n_a + 1) - r}$, wenn $k(n_a + 1) - r \geq 0$. Da für $x = a$ nur das konstante Glied übrigbleibt, ist das Glied mit dem höchsten k dasjenige, wofür $k(n_a + 1) - r \leq 0$, während $k(n_a + 1) - (r + 1) > 0$ ist.

Wir setzen

$$P_l(a) = \sum_{t=0}^l K_{t,l}(a) \cdot (i\omega)^t \quad (51)$$

wobei $K_{0,0} = 1$, $K_{0,m} = 0$ für $m \geq 1$, $K_{t,m} = 0$ für $t > \left\lfloor \frac{m}{n_a + 1} \right\rfloor$ ist.

Einsetzen in (50) führt zu

$$K_{t+1, m+1}(a) = \sum_{r=(n_a+1)^t}^{r=m-n_a} \binom{m}{r} f^{(m-r+1)}(a) \cdot K_{tr}(a) \quad (52)$$

also z. B. $K_{l,m}(a) = f^{(m)}(a)$.

Mit diesen Abkürzungen erhält man

$$L^{(s)}(a) = \sum_{l=0}^s \binom{s}{l} g^{(s-l)}(a) \cdot P_l(a) = \sum_{t=0}^s (i\omega)^t l_{ts}(a) \quad (53)$$

wobei

$$l_{ts}(a) = \sum_{m=(n_a+1)^t}^s \binom{s}{m} g^{(s-m)}(a) \cdot K_{t,m}(a) \quad (54)$$

gesetzt wurde. Es ist $l_{t,s}(a) = 0$ für $t > \left\lfloor \frac{s}{n_a + 1} \right\rfloor$, $l_{0,s}(a) = g^{(s)}(a)$.

Wenn man diese Größen und (45) in (49) einsetzt und nach Potenzen von $i\omega$ ordnet, erhält man mit $j = s - n_a \cdot t$

$$A = \sum_{j=0}^{(k+1)(n_a+1)} A_j \cdot \omega^{-(j+1)/n_a} + O(\omega^{-(k+2)/n_a}) \quad (55)$$

$$A_j = \frac{1}{n_a} e^{i\omega f(a)} \sum_{t=0}^j l_{t, j+n_a t}(a) \cdot i^t \cdot \frac{\Gamma[(j + n_a t + 1)/n_a] \cdot e^{\pm i\pi(j + n_a t + 1)/2n_a}}{\left(\frac{1}{n_a!} |f^{(n_a)}(a)| \right)^{(j+n_a t+1)/n_a}}$$

$$f^{(n_a)}(a) \geq 0 \quad (56)$$

was mit (4), (5) übereinstimmt.

Analog erhält man für B

$$B = - \sum_{s=0}^K L^{(s)}(b) \cdot \varphi_{s+1}(b^-) + O(\omega^{-(k+2)/n_b}) \quad (57)$$

($K = (k+1)(n_b+1)$) und daraus

$$B = \sum_{j=0}^{(k+1)(n_b+1)} B_j \cdot \omega^{-(j+1)/n_b} + O(\omega^{-(k+2)/n_b}) \quad (58)$$

$$B_j = - \frac{1}{n_b} e^{i\omega f(b)} \sum_{t=0}^j l_{t,j+n_b t}(b) \cdot i^t \frac{\Gamma[(j+n_b t+1)/n_b]}{\Gamma(j+n_b t+1)} \cdot \frac{e^{\pm i\pi(j+n_b t+1)/2n_b}}{\left(\frac{1}{n_b!} |f^{(n_b)}(b)|\right)^{(j+n_b t+1)/n_b}} \cdot D(j+n_b t, n_b) \quad f^{(n_b)}(b) \geq 0 \quad (59)$$

Dabei sind die entsprechenden Größen analog zu denen bei A zu definieren.

Wie man leicht einsieht, kommen in A_j die Ableitungen von g bis zur j -ten, die von f bis zur $(n_a + j + 1)$ -ten vor, womit Satz II. bewiesen ist.

Wenn für endlich viele Punkte x_i in (a, b) $f'(x_i) = 0$ ist, $f^{(k)}(x_i) = 0$ für $1 \leq k < n_i$, $f^{(n_i)}(x_i) \neq 0$, unterteilen wir $[a, b]$ in den Punkten x_i und wenden auf die Teilintervalle den Satz II. an. Wenn für x_i $n_i = 1$ wäre, würde man keinen Beitrag von x_i erhalten, da in den Gliedern V_i in jedem Term ein Faktor $1 - D(m, n_i)$ vorkommt und diese Größen für $n_i = 1$ identisch für alle m verschwinden. Für $n_i > 1$ verschwindet indes $1 - D(m, n_i)$ nicht identisch für alle m und man erhält also von jedem in (a, b) liegenden Punkt stationärer Phase einen Beitrag.

Satz III

Es seien in einem endlichen Gebiet B der $x-y$ Ebene mit Einschluß des Randes $S(B)$ zwei Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ definiert. Es sei $f(x, y)$ reell, $g(x, y)$ reell oder komplex, x, y reell. $f(x, y)$ bzw. $g(x, y)$ seien $2L+3$, bzw. $2L$ mal stetig differenzierbar (L natürlich beliebig), ω sei reell ≥ 1 . Im Inneren von B sollen nur endlich viele Punkte stationärer Phase erster Art existieren, für die gilt:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} = 0; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i} = 0 \quad (60)$$

Es soll kein Punkt (6) auf $S(B)$ liegen. Für jeden dieser Punkte stationärer Phase erster Art sei mindestens eine der drei Größen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq 0.$$

Die Gleichung der Berandungskurve sei $x(s)$, $y(s)$. $x^{(m)}(s)$, $y^{(m)}(s)$ $1 \leq m \leq M$ (M natürlich beliebig) haben nur endlich viele „Unstetigkeitspunkte“. Dann existiert für das Integral

$$J = \int_B \int g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy \quad (61)$$

ein Näherungswert \bar{J} , der sich in der Form

$$\bar{J} = \sum_i V_i + R + O(\omega^{-2(L+1)/3}) \quad (62)$$

darstellen läßt, wobei V_i eindeutig bestimmt ist durch den Wert von f und g und ihrer Ableitungen nach x und y an der Stelle stationärer Phase erster Art x_i , y_i , R eindeutig bestimmt ist durch den Wert von f und g und ihrer Ableitungen nach n und s auf $S(B)$ (n nach außen positiv gezählte Normale, s Bogenlänge der Randkurve). V_i , R haben die Form mit $\omega \rightarrow \infty$ asymptotischer Reihen.

Ein Punkt stationärer Phase erster Art wird näher durch das Vorzeichen der HESSESchen Determinante

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right] \Big|_{x_i, y_i}$$

klassifiziert. Wir bezeichnen ihn als elliptisch, parabolisch, hyperbolisch, je nachdem $D \gtrless 0$ ist, da dann dieser Punkt ein elliptischer, parabolischer, bzw. hyperbolischer Flächenpunkt der Fläche $z = z(x, y)$ ist.

Man könnte Satz III. auch unter erweiterten Voraussetzungen beweisen, es könnten für einen Punkt stationärer Phase erster Art auch alle zweiten Ableitungen verschwinden (was weitere Klassifikationen notwendig machen würde) und es könnte ein Punkt stationärer Phase erster Art auch auf $S(B)$ liegen.

Satz IV

Die Größe R , die sich als Summe von Integralen vom Typus (2) darstellt, hat nach den Sätzen I und II einen Näherungswert

$$\bar{R} = \sum_j W_j + \sum_k X_k \quad (63)$$

wobei die W_j eindeutig bestimmt sind durch das Verhalten der Funktionen f und g und ihrer Ableitungen nach n und s an den Stellen stationärer Phase zweiter Art der Funktion $f(x, y)$ \bar{x}_j, \bar{y}_j :

$$\frac{d}{ds} [f(x(s), y(s))] \Big|_{s_j} = 0 \quad (64)$$

Die Größen X_k sind eindeutig bestimmt durch das Verhalten von f und g und ihrer Ableitungen nach n und s an den „Unstetigkeitspunkten“ der Berandung.

Der allgemeine Beweis der Sätze III und IV folgt unmittelbar aus Satz II. Wir zerlegen das Innere von B durch beliebige geschlossene Kurven in Zellen, die jede in ihrem Inneren genau einen Punkt stationärer Phase erster Art enthalten. Die Gesamtheit aller dieser Kurvenstücke im Inneren von B heiße die innere Berandung im Gegensatz zur äußeren Berandung $S(B)$. Für irgendeine derartige „Zelle“ (z. B. mit x_i, y_i im Inneren) wird ein Polarkoordinatensystem mit x_i, y_i als Koordinatenursprung eingeführt (r, φ) . Wir integrieren zuerst über r und dann über φ , was unter den angegebenen Voraussetzungen über f, g und B sicher möglich ist. Für die Integration nach r , die vom Koordinatenursprung bis zu dem auf dem betreffenden Strahl liegenden Punkt der Zellenberandung durchzuführen ist, verwenden wir die Methode der stationären Phase nach Satz II ($a = 0, n_b = 1$). Wir erhalten einen Beitrag des Punktes x_i, y_i und einen Beitrag vom Punkt der Zellenberandung, bei der Integration nach φ also nur einen Anteil des Punktes x_i, y_i und einen Anteil des Randes, wobei der Anteil des Randes nach Satz II eindeutig von f und g und deren Ableitungen nach der Normale und Tangente der Zellenberandung abhängt.

Bei der Summation der Anteile sämtlicher Zellen fallen die Beiträge aller inneren Berandungen weg, da das Integral über jedes Stück der inneren Berandung zweimal mit entgegengesetzten Vorzeichen auftritt. Es bleibt also nur der Anteil der Punkte stationärer Phase erster Art und der Anteil der äußeren Berandung übrig, womit Satz III bewiesen ist.

Satz IV ergibt sich unmittelbar daraus, daß die f und g im Integralausdruck für R entsprechenden Funktionen als Funktionen von $x(s), y(s)$ stetige Ableitungen nach s nur haben, wenn $x(s), y(s)$ stetige Ableitungen haben, also nur zwischen den „Unstetigkeitspunkten“ der Berandung. Die „Unstetigkeitspunkte“ geben Beiträge zum Integral, da dort zwar die rechts- und linksseitigen Grenzwerte für die entsprechenden Ableitungen existieren, aber verschiedene Werte haben. Die Art der „Unstetigkeit“ der Randkurve bestimmt dann das asymptotische Verhalten dieses Beitrages für $\omega \rightarrow \infty$.

Wenn der Punkt stationärer Phase erster Art elliptisch ist ($D > 0$), gilt explizit

$$J = \sum_1^L V_i + R + O(\omega^{-2(L+1)/3}) \quad (65)$$

$$V_i = \sum_{l=0}^L A_l(x_i, y_i) \omega^{-(l+1)} + O(\omega^{-1-L/3}) \quad (66)$$

wobei

$$A_l(x_i, y_i) = \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{i|D|_{1/2}} \sum_{t=0}^{2L} \sum_{k=0}^{2L-2(t+l)} \frac{\Gamma(t+l+1) l_{2(t+l),k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(2t+2l-k+1)} \cdot J_{2(t+l),k} e^{i\frac{\pi}{2}t} e^{\pm i\pi(t+l+1)} \quad f_{20} \geq 0 \quad (67)$$

ist. Dabei bedeuten:

$$J_{2n,k} = \frac{2\pi}{2^n D^n} |f_{02}^{k,2} f_{20}^{n-k,2}| \sum_{l=\text{Max}(0, k-n)}^{\text{Min}(n,k)} \binom{k}{l} \binom{2n-k}{n-l} e^{i\chi(2l-k)} \quad (68)$$

$$\sin \chi = \left| \left(\frac{D}{f_{20} f_{02}} \right)^{1/2} \right|; \quad \cos \chi = \mp \frac{f_{11}}{|(f_{20} f_{02})^{1/2}|}; \quad f_{20} \geq 0 \quad (69)$$

$$t_{jk} = \sum_{\alpha=0}^k \sum_{\beta=3t-\alpha}^{j-k} \binom{k}{\alpha} \binom{j-k}{\beta} g_{k-\alpha, j-k-\beta} \cdot {}_tK_{\alpha\beta} \quad (70)$$

($t_{j,k} = 0$) für $3t > j$) und es ist

$${}_{t-1}K_{m,n} = \sum \binom{m-1}{j} \binom{n}{k} {}_tK_{j,k} \cdot f_{m-j, n-k} \quad (71)$$

$3t \leq j+k \leq m+n-3$, $m \geq 1$. Die dazu analoge Formel für $n \geq 1$ erhält man durch Vertauschen von m, n und j, k auf der rechten Seite von (71). Es ist ferner ${}_0K_{0,0} = 1$, ${}_0K_{m,n} = 0$ für $m, n \neq 0$, ${}_tK_{m,n} \neq 0$ nur für $3t \leq m+n$, ${}_tK_{m,n} = 0$ für $3t > m+n$. $f_{k,j-k}$, bzw. $g_{k,j-k}$ bezeichnen

$$\left. \frac{\partial^j f}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \right|_{x_i, y_i}, \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{\partial^j g}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \right|_{x_i, y_i}$$

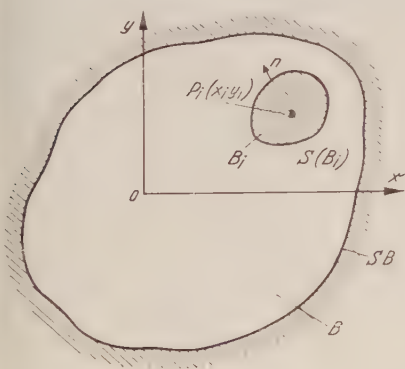


Abb. 1

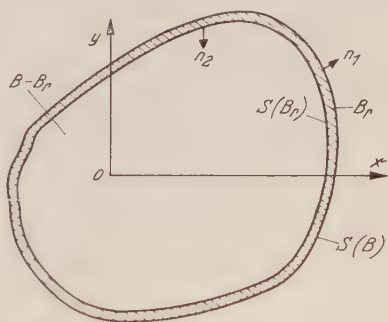


Abb. 2

Zur Durchführung der Rechnung definieren wir für jeden Punkt stationärer Phase erster Art x_i, y_i und für den Rand $S(B)$ eine Neutralisatorfunktion, z. B. für den Punkt stationärer Phase erster Art x_i, y_i $N_i(x, y)$, für den Rand $S(B)$ $N_r(x, y)$.

$N_i(x, y)$ sei beliebig oft stetig differenzierbar, $\neq 0$ nur in einem Gebiet B_i in der Umgebung von $x_i, y_i, = 0$ außerhalb B_i (Abb. 1) und es soll dafür gelten

$$\frac{\partial^{j+k}[1 - N_i(x, y)]}{\partial x^j \partial y^k} \bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = 0, \quad j, k \geq 0; \quad \frac{\partial^j N_i(x, y)}{\partial n^j} \bigg|_{S(B_i)} = 0 \quad j \geq 0 \quad (72)$$

$N_r(x, y)$ sei beliebig oft stetig differenzierbar, $\neq 0$ nur in einem Streifen B_r entlang des Randes $S(B)$, $= 0$ überall außerhalb B_r (Abb. 2) und es soll dafür gelten

$$\frac{\partial^j [1 - N_r(x, y)]}{\partial n_1^j} \bigg|_{S(B)} = 0, \quad j \geq 0; \quad \frac{\partial^j N_r(x, y)}{\partial n_2^j} \bigg|_{S(B_r)} = 0, \quad j \geq 0 \quad (73)$$

(61) wird analog zum Integral (2) bei Satz II umgeformt:

$$\begin{aligned} J = & \iint_B g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy - \sum_i \iint_{B_i} N_i(x, y) g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy + \\ & + \iint_{B_r} N_r(x, y) g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy + \\ & + \iint_B g(x, y) \left\{ 1 - \sum_i N_i(x, y) - N_r(x, y) \right\} e^{i\omega f(x, y)} dx dy \end{aligned} \quad (74)$$

Die Integrale sind der Reihe nach I_i, R, I_R (I_R Restterm) und sind wegen der Definition von N_i, N_r über B_i, B_r, B zu erstrecken. Wir setzen für den Punkt x_i, y_i

$$N_i(x, y) = w(r/\varepsilon_i); \quad \varepsilon_i = C \omega^{-1/3} \quad (75)$$

wobei

$$r^2 = \frac{1}{4} [f_{20}(x - x_i)^2 + 2f_{11}(x - x_i)(y - y_i) + f_{02}(y - y_i)^2] \quad (76)$$

ist und w die durch (9) definierte Neutralisatorfunktion.

Für den Rand $S(B)$ sei

$$N_r(x, y) = w\left(-\frac{\bar{x}}{\varepsilon_r}\right); \quad \varepsilon_r = \bar{C} \omega^{-1/3} \quad (77)$$

(C, \bar{C} sind positive von ω unabhängige Konstante), \bar{x}, y sei das natürliche Koordinatensystem der Randkurve $x(s), y(s)$ im Punkte s (Abb. 3)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x(s)) y'(s) - (y - y(s)) x'(s) \\ \bar{y} &= (x - x(s)) x'(s) + (y - y(s)) y'(s) \end{aligned} \quad (78)$$

Wir setzen speziell $\bar{y} = 0$, ordnen also jedem Punkt $P(x, y)$ in der Umgebung von $S(B)$ in B den auf der gleichen Normale n liegenden Kurvenpunkt als Koordinatenursprung zu. Evident erfüllen (75), (77) die für die Neutralisatorfunktionen aufgestellten Bedingungen.

Zur Abschätzung von J_R benutzen wir die für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x, y)$ gültige Identität

$$\Delta e^{i\omega f(x, y)} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] e^{i\omega f(x, y)} = [i\omega \Delta f - \omega^2 (\nabla f)^2] e^{i\omega f(x, y)} \quad (79)$$

oder anders geschrieben

$$e^{i\omega f(x,y)} = \frac{\Delta e^{i\omega f(x,y)}}{[i\omega \Delta f - \omega^2(\nabla f)^2]} \quad (80)$$

Der Nenner von (80) verschwindet offensichtlich nur dann, wenn gleichzeitig $(\nabla f)^2 = 0$ und $\Delta f = 0$ ist, also nur, wenn in den Punkten stationärer Phase erster Art $\Delta f = 0$ ist. Für einen elliptischen oder parabolischen Flächenpunkt ($D \geq 0$) ist das unmöglich. Für einen hyperbolischen Flächenpunkt kann der Nenner von (80) höchstens wie eine Potenz der Abstände $x - x_i$, $y - y_i$ verschwinden. (Es können auch in diesem Fall die benötigten Grenzwerte definiert werden, wie sich aus dem Folgenden ergibt.)

Wir definieren ein Funktionensystem:

$$H_0(x, y) = g(x, y) \frac{1 - \sum_i N_i(x, y) - N_r(x, y)}{i\omega \Delta f - \omega^2(\nabla f)^2} \quad (81)$$

$$H_{K+1}(x, y) = \frac{\Delta H_K(x, y)}{i\omega \Delta f - \omega^2(\nabla f)^2} \quad K \geq 0$$

Nach den Voraussetzungen über f und g sind die $H_K(x, y)$ in $B - \sum_i B_i - B_r$ sicher zweimal stetig differenzierbar, da die Funktionen und ihre Ableitungen dort immer existieren. Ebenso ist in B_i $H_0(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar, da die Funktion und ihre Ableitungen in x_i, y_i durch Grenzwerte definiert werden können (und $1 - N_i(x, y)$ in x_i, y_i stärker verschwindet als jede Potenz der Abstände) also für $D \geq 0$ in x_i, y_i stetig ist.

$$H_0(x, y)|_{B_i} = \frac{g(x, y) (1 - N_i(x, y))}{i\omega \Delta f - \omega^2(\nabla f)^2} \quad (82)$$

Dies gilt wegen (72) auch für alle Ableitungen, so daß $H_K(x, y)$ in B_i mit Einschluß des Randes und des Punktes x_i, y_i definiert und dort zweimal stetig differenzierbar ist. Dies kann in gleicher Weise für B_r gezeigt werden, so daß die $H_K(x, y)$ also in ganz B mit Einschluß des Randes zweimal stetig differenzierbar sind.

Wir wenden den GREENSchen Integralsatz für zweimal stetig differenzierbare Funktionen u, v an:

$$\iint_B (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_{S(B)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (83)$$

$$\begin{aligned} J_K &= \iint_B \left(1 - \sum_i N_i - N_r \right) g e^{i\omega f} dx dy = \iint_B H_0 \Delta e^{i\omega f} dx dy = \\ &= \iint_B \Delta H_0 \cdot e^{i\omega f} dx dy + \int_{S(B)} \left\{ H_0 \frac{\partial e^{i\omega f}}{\partial n} - e^{i\omega f} \frac{\partial H_0}{\partial n} \right\} \Big|_{\substack{x(s) \\ y(s)}} ds \end{aligned} \quad (84)$$

Wenn man das Verfahren iteriert, wird

$$J_R = \int_B \int \Delta H_K e^{i\omega f} dx dy + \sum_{i=0}^K \oint \left\{ H_i \frac{\partial e^{i\omega f}}{\partial n} - e^{i\omega f} \frac{\partial H_i}{\partial n} \right\} \Big|_{\substack{x(s) \\ y(s)}} ds \quad (85)$$

In B_r gilt:

$$H_0(x, y) = \frac{g(x, y) \{1 - N_r(x, y)\}}{i \omega \Delta f - \omega^2 (Vf)^2} \quad (86)$$

$H_i(x, y) \Big|_{\substack{x(s) \\ y(s)}}$ und $\frac{\partial H_i(x, y)}{\partial n} \Big|_{\substack{x(s) \\ y(s)}}$ setzen sich summativ aus Gliedern zusammen, deren jedes einen Faktor der Gestalt

$$\frac{d^j}{dn^j} \left\{ 1 - N_r(x, y) \right\} \Big|_{S(B)}$$

enthält ($0 \leq j \leq 2i$, bzw. $0 \leq j \leq 2i + 1$). Für die Berandung $S(B)$ verschwinden nach (73) alle diese Ausdrücke und es gilt:

$$H_i(x, y) \Big|_{S(B)} = 0; \quad \frac{\partial H_i(x, y)}{\partial n} \Big|_{S(B)} = 0 \quad (87)$$

Damit fallen alle Linienintegrale in (85) weg und man erhält:

$$J_R = \int_B \int \Delta H_K \cdot e^{i\omega f(x, y)} dx dy \quad (88)$$

Für B_i gilt mit der Abkürzung

$$l(x, y) = i \omega \Delta f(x, y) - \omega^2 (Vf(x, y))^2 \quad (89)$$

$$Vf = O(\varepsilon_i); \quad \Delta f = O(1); \quad l = O(\varepsilon_i^{-4}); \quad V l = O(\varepsilon_i^{-5}); \quad \Delta l = O(\varepsilon_i^{-6}) \quad (90)$$

und wie man durch vollständige Induktion zeigen kann,

$$H_K(x, y) = O(\varepsilon_i^{2K+4}) = O(\omega^{-(2K+4)/3}) \quad (91)$$

$$\Delta H_K(x, y) = O(\varepsilon_i^{2K+2}) = O(\omega^{-(2K+2)/3})$$

also schließlich

$$\int_{B_i} \int \Delta H_K(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy = O(\omega^{-(2K+4)/3}) \quad (92)$$

Analog erhält man für B_r $l = O(\varepsilon_r^{-4})$ und wie man wieder durch vollständige Induktion zeigen kann

$$H_K(x, y) = O(\varepsilon_r^{2K+4}); \quad \Delta H_K(x, y) = O(\varepsilon_r^{2K+2}) \quad (93)$$

also

$$\int_{B_r} \int \Delta H_K(x, y) \cdot e^{i\omega f(x, y)} dx dy = O(\omega^{-(K+1)} \varepsilon_r) = O(\omega^{-(K+3)/2}) \quad (94)$$

Da das Integral (88) erstreckt über $B = \Sigma B_i = B_r$ mit $\omega \rightarrow \infty$ sicher stärker gegen Null geht als in B_i oder B_r , wird endlich:

$$J_R = \iint_B \Delta H_K(x, y) e^{i\omega f} dx dy = O(\omega^{-(2K+4)/3}) \quad (95)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} \left\{ f_{20}(x - x_i)^2 + 2 f_{11}(x - x_i)(y - y_i) + f_{02}(y - y_i)^2 \right\} \\ h(x, y) &= g(x, y) e^{i\omega} [f(x, y) - \phi(x, y)] \end{aligned} \quad (96)$$

geht V_i über in

$$V_i = \iint_{B_i} N_i(x, y) \cdot h(x, y) e^{i\omega \phi(x, y)} dx dy \quad (97)$$

Wir transformieren die quadratischen Glieder in $\phi(x, y)$ durch Drehung des Koordinatensystems auf Hauptachsen $x, y \rightarrow \bar{x}, \bar{y}$, führen eine Streckung durch $\bar{x}, \bar{y} \rightarrow \xi, \eta$ und gehen zu Polarkoordinaten (r, φ) über. Die Gesamttransformation lautet, wie man nach einigen Umrechnungen sieht

$$\begin{aligned} x - x_i &= b_1 r \cos \varphi \cos \alpha + b_2 r \sin \varphi \sin \alpha \\ y - y_i &= -b_1 r \cos \varphi \sin \alpha + b_2 r \sin \varphi \cos \alpha \end{aligned} \quad (98)$$

wobei

$$\sin 2\alpha = \frac{2 f_{11}}{[(f_{02} - f_{20})^2 + 4 f_{11}^2]^{1/2}}; \quad \frac{1}{b_1^2} = \frac{1}{4} |f_{20} + f_{02} - [(f_{02} - f_{20})^2 + 4 f_{11}^2]^{1/2}| \quad (99)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{f_{02} - f_{20}}{(f_{02} - f_{20})^2 + 4 f_{11}^2}^{1/2}; \quad \frac{1}{b_2^2} = \frac{1}{4} |f_{20} + f_{02} + [(f_{02} - f_{20})^2 + 4 f_{11}^2]^{1/2}|$$

ist, die JACOBISCHE Determinante der Transformation $x, y \rightarrow r, \varphi$ wird

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r b_1 \cdot b_2 = \frac{2r}{|D|^{1/2}} \quad (100)$$

Damit erhält man

$$V_i = \frac{2 e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{|D|^{1/2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\varepsilon_i} h(x(r \cos \varphi, r \sin \varphi), y(r \cos \varphi, r \sin \varphi)) \cdot u\left(\frac{r}{\varepsilon_i}\right) e^{+i\omega r^2} \cdot r dr d\varphi \quad (101)$$

Wir setzen zur Abkürzung $\bar{h}(r, \varphi) = r \cdot h(x(r \cos \varphi, r \sin \varphi), y(r \cos \varphi, r \sin \varphi))$ und führen die Integration nach r wie bei (48) durch ($a = 0$, $n_a = 2$, $f''(a) = \pm 2$)

$$\int_{r=0}^{\varepsilon_i} \bar{h}(r, \varphi) \cdot u\left(\frac{r}{\varepsilon_i}\right) \psi_0(r) dr = \sum_{j=0}^{K_1} \frac{\partial^j \bar{h}}{\partial r^j} \Big|_{r=0} \psi_{j+1}(0^+) + \int_{r=0}^{\varepsilon_i} \frac{\partial^{K_1+1} \bar{h}}{\partial r^{K_1+1}} \cdot \psi_{K_1+1}(r) dr \quad (102)$$

setzen für $\bar{h}(r, \varphi)$ ein und integrieren über φ . Mit der Abkürzung

$$J_{j,k} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^k \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^{j-k} d\varphi \quad (103)$$

ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} \bar{h} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial^j \bar{h}}{\partial r^j} \Big|_{r=0} &= \sum_{k=0}^{j-1} j \binom{j-1}{k} \frac{\partial^{j-1} h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \Big|_{x_i, y_i} \\ &\cdot \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^k \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^{j-k-1} \quad j > 0 \end{aligned} \quad (104)$$

wenn man noch statt j $j+1$, statt K_1 K_1+1 schreibt:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\varepsilon_i} \bar{h}(r, \varphi) w \left(\frac{r}{\varepsilon_i} \right) \psi_0(r) dr d\varphi &= \sum_{j=0}^{K_1} \sum_{k=0}^j (j+1) \binom{j}{k} \frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \Big|_{x_i, y_i} \\ &\cdot J_{j,k} \cdot \psi_{j+2}(0^+) + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\varepsilon_i} \frac{\partial^{K_1+2} \bar{h}(r, \varphi)}{\partial r^{K_1+2}} \cdot \psi_{K_1+2}(r) dr d\varphi \end{aligned} \quad (105)$$

Das Restintegral wird abgeschätzt. Es ist

$$\begin{aligned} \psi_{K_1+2}(r) &= O(\omega^{-(K_1+2)/2}); \quad \frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} = O(\omega^{j/3}); \\ r^{j-K_1-1} &= O(\omega^{-(j-K_1-1)/3}) \quad j \geq K_1+1 \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{K_1+2} \bar{h}}{\partial r^{K_1+2}} &= \sum_{j=K_1+1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{1}{j!} \binom{j}{k} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^k \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^{j-k} \frac{(j+1)!}{(j-k-1)!} \frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \Big|_{x_i, y_i} \\ &= O(\omega^{(K_1+1)/3}) \end{aligned} \quad (107)$$

daher

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon_i} \frac{\partial^{K_1+2} \bar{h}(r, \varphi)}{\partial r^{K_1+2}} \cdot \psi_{K_1+2}(r) dr d\varphi = O(\omega^{-1-K_1/6}) \quad (108)$$

Wenn man noch (45) einsetzt (mit $a=0$, $n_a=2$, $f''(a)=\pm 2$), wird

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon_i} \bar{h}(r, \varphi) w \left(\frac{r}{\varepsilon_i} \right) \psi_0(r) dr d\varphi &= \sum_{j=0}^{K_1} \sum_{k=0}^j (j+1) \binom{j}{k} \frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \Big|_{x_i, y_i} \\ &\cdot J_{j,k} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(j+2)} \cdot \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{2}(\frac{j}{2}+1)}}{\omega^{1-j/2}} + O(\omega^{-K_1/6-1}) \end{aligned} \quad (109)$$

Wir setzen

$$P_{m,n} = \frac{\partial^{m+n} e^{i\omega(f-p)}}{\partial x^m \partial y^n} \bigg|_{\substack{x_i \\ y_i}}$$

Wie man durch vollständige Induktion zeigen kann, gilt:

$$P_{m+1,n} = i\omega \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{j} \binom{n}{k} P_{j,k} \frac{\partial^{m+n-j-k+1}(f-p)}{\partial x^{m-j+1} \partial y^{n-k}} \bigg|_{\substack{x_i \\ y_i}} \quad (110)$$

Durch Einsetzen in (96) folgt:

$$\frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \bigg|_{\substack{x_i \\ y_i}} = \sum_{\alpha=0}^k \sum_{\beta=0}^{j-k} \binom{k}{\alpha} \binom{j-k}{\beta} g_{k-\alpha, j-k-\beta} \cdot P_{\alpha\beta} \quad (111)$$

$P_{m,n}$ ist ein Polynom in $i\omega$. Wir machen den Ansatz

$$P_{m,n} = \sum_{t=0}^{m+n} {}_tK_{m,n} (i\omega)^t$$

wobei wegen der Bedeutung der $P_{m,n}$

$${}_tK_{m,n} = \frac{1}{t!} \frac{\partial^{m+n}(f-p)^t}{\partial x^m \partial y^n} \bigg|_{\substack{x_i \\ y_i}}$$

ist. $f-p$ hat an der Stelle x_i, y_i eine dreifache Nullstelle, daher ist

$P_{m,n}$ höchstens vom Grade $\left[\frac{m+n}{3} \right]$ in $i\omega$, also gilt ${}_tK_{m,n} \neq 0$ nur für

$3t \leq m+n$, ${}_tK_{m,n} = 0$, für $3t > m+n$, ${}_0K_{00} = 1$, ${}_0K_{m,n} = 0$ für $m, n \neq 0$. Wir setzen in (110) ein. Dann wird

$${}_{t+1}K_{m+1,n} = \sum_j \sum_k \binom{m}{j} \binom{n}{k} {}_tK_{j,k} \cdot f_{m-j+1, n-k} \quad (112)$$

wobei $3t \leq j+k \leq m+n-2$ oder

$${}_{t-1}K_{m,n} = \sum_j \sum_k \binom{m-1}{j} \binom{n}{k} {}_tK_{j,k} \cdot f_{m-j, n-k} \quad (113)$$

mit $3t \leq j+k \leq m+n-3$, $m \geq 1$, bzw. die dazu analoge Formel, wenn man auf der rechten Seite von (113) m, n und j, k vertauscht.

(Für $n \geq 1$ gültig.)

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j h}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \bigg|_{\substack{x_i \\ y_i}} &= \sum_{\alpha=0}^k \sum_{\beta=0}^{j-k} \binom{k}{\alpha} \binom{j-k}{\beta} g_{k-\alpha, j-k-\beta} \cdot \sum_{t=0}^j {}_tK_{\alpha\beta} (i\omega)^t = \\ &= \sum_{t=0}^j (i\omega)^t {}_t l_{j,k} \end{aligned} \quad (114)$$

wobei

$$l_{j,k} = \sum_{\alpha=0}^k \sum_{\beta=3t-\alpha}^{j-k} \binom{k}{\alpha} \binom{j-k}{\beta} g_{k-\alpha, j-k-\beta} \cdot t K_{\alpha\beta} \quad (115)$$

ist und $l_{j,k} = 0$ für $3t > j$. Daraus folgt schließlich

$$V_i = \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{|D|^{1/2}} \sum_{j=0}^{K_1} \sum_{k=0}^j \sum_{t=0}^j (j+1) \binom{j}{k} J_{j,k} \cdot l_{j,k} \cdot \frac{\Gamma(j/2+1)}{\Gamma(j+2)} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2} \left(\frac{j}{2} + 1 \right)} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2} t} \cdot \omega^{t - \frac{j}{2} - 1} + O(\omega^{-K_1/6-1}) \quad (116)$$

Wir berechnen noch die Größen $J_{n,k}$. Nach einigen Transformationen erhält man mit

$$\sin \chi = \left| \frac{D^{1/2}}{(f_{20} f_{02})^{1/2}} \right|; \quad \cos \chi = \mp \frac{f_{11}}{|(f_{20} f_{02})^{1/2}|}; \quad f_{20} \geq 0 \quad (117)$$

$$J_{n,k} = |2^{n/2} f_{02}^{k/2} f_{20}^{(n-k)/2} D^{-n-2}| \cdot \int_0^{2\pi} \cos^k \varphi \cdot \cos^{n-k}(\varphi - \chi) d\varphi; \quad (118)$$

Ausrechnen mit Hilfe des Residuensatzes ($z = e^{i\varphi}$, Integration über den Einheitskreis) ergibt:

$$J_{2n+1,k} = 0$$

$$J_{2n,k} = \frac{2\pi}{2^n D^n} |f_{02}^{k/2} f_{20}^{n-k/2}| \sum_{l=Min(n,k)}^{l=Max(n,k)} \binom{k}{l} \cdot \binom{2n-k}{n-l} e^{i\chi(2l-k)} \quad (119)$$

Wir ordnen nach Potenzen von ω , setzen $t - j/2 = -l$; $L = \frac{1}{2} K_1$. Dann wird

$$V_i = \sum_{l=0}^L A_l(x_i, y_i) \omega^{-(l+1)} + O(\omega^{-L/3-1}) \quad (120)$$

und

$$A_l(x_i, y_i) = \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{|D|^{1/2}} \cdot \sum_{t=0}^{2l} \sum_{k=0}^{2(t+l)} \frac{\Gamma(t+l+1) l_{2(t+l),k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(2t+2l-k+1)} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2} t} \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2} (t+l+1)} \cdot J_{2(t+l),k} \quad (121)$$

womit alles bewiesen ist.

In A_l kommen alle Ableitungen von g bis zur $2l$ -ten Ordnung, von f bis zur $2l+3$ -ten Ordnung vor. In H_k alle Ableitungen von g bis zur $2K$ -ten Ordnung, von f bis zur $2K+2$ -ten Ordnung. In (94) kommen

daher die Ableitungen von g bis zur $2K + 2$ -ten Ordnung, von f bis zur $2K + 4$ -ten Ordnung vor, in V_i die Ableitungen von g bis zur $2L$ -ten Ordnung, von f bis zur $2L + 3$ -ten Ordnung. Wir setzen schließlich noch $K = L - 1$, dann wird:

$$\sum_i V_i + J_R = \sum_i \sum_{l=0}^L A_l(x_i, y_i) \omega^{-(l+1)} + O(\omega^{-1-L/3}) + O(\omega^{-2(L+1)/3}) \quad (122)$$

Zur Berechnung der Größe R hätte man etwa in folgender Weise vorgehen. Man transformiert in

$$R = \iint_{B_r} N_r(x, y) g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy \quad (123)$$

gemäß (78) auf das Koordinatensystem \bar{x}, \bar{y} und setzt speziell $\bar{y} = 0$, $\bar{x} = n$. Die zu (78) inversen Transformationen sind dann:

$$\begin{aligned} x &= x(s) + n y'(s) \\ y &= y(s) - n x'(s) \end{aligned} \quad (124)$$

Die Transformationsdeterminante lautet

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(n, s)} = \begin{vmatrix} y'(s) & x'(s) + n y''(s) \\ -x'(s) & y'(s) - n x''(s) \end{vmatrix} = 1 + n k(s) \quad (125)$$

($k(s)$ Krümmung der Randkurve).

(123) erhält dann, wenn man noch

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x(n)}; \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y(n)}; \quad p(n, s) = f(x(s), y(s)) + [f_1 y'(s) - f_2 x'(s)] \cdot n \\ h(n, s) &= g(x(n, s), y(n, s)) e^{i\omega[f(x(n, s), y(n, s)) - p(n, s)]} \end{aligned} \quad (126)$$

setzt, die Gestalt

$$R = \oint_{s: n+\epsilon_r}^0 \left\{ \int_{n-\epsilon_r}^n \omega \left(-\frac{n}{\epsilon_r} \right) h(n, s) e^{i\omega p(n, s)} \cdot (1 + k(s) \cdot n) dn \right\} ds = \oint_s R(s) ds \quad (127)$$

$R(s)$ hat die Form von B [in (13)] und kann nach der Methode der stationären Phase im R_1 (mit $n_b = 1$) ausgewertet werden. Durch entsprechendes Vertauschen der Bezeichnungen erhalten wir

$$R(s) = - \sum_{j=0}^{2(k+1)} C_j(s) \cdot e^{i\omega f(x(s), y(s))} \omega^{-(j+1)} + O(\omega^{-k-2}) \quad (128)$$

wobei $C_j(s) \cdot e^{i\omega f(x(s), y(s))}$ die Stelle von B_j in (58) einnimmt. Daraus folgt weiter

$$R = - \sum_{j=0}^{2(k+1)} \omega^{-(j+1)} \oint C_j(s) e^{i\omega f(x(s), y(s))} ds + O(\omega^{-k-2}) \quad (129)$$

Für die Auswertung von (129) haben wir nach Satz IV die Stellen stationärer Phase zweiter Art

$$\left. \frac{d}{ds} [f(x(s), y(s))] \right|_{s=s_j} = 0 \quad (130)$$

und die Stellen, in denen $C_j(s)$ und $f(x(s), y(s))$ unstetige Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung haben, in denen also für irgendein m $x^{(m)}(s)$ oder $y^{(m)}(s)$ unstetig ist ($1 \leq m \leq M$), aufzusuchen. Wenn für einen Punkt stationärer Phase zweiter Art n_i die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von $f(x(s), y(s))$ ist, ergeben die Integrale in (129) Reihenentwicklungen der Form $\omega^{-(l+1)/n_i}$, daher hat

dann R Reihenentwicklungen der Form $\omega^{-\frac{1}{n_i} \{(j+1)n_i + (l+1)\}}$, also mit $m = j \cdot n_i + l$ $\omega^{-\frac{1}{n_i} (m+1) - 1}$ $m = 0, 1, 2, \dots$. Die explizite Auswertung von R führt zu sehr komplizierten Formeln und soll hier nicht durchgeführt werden.

Wenn der Punkt stationärer Phase erster Art hyperbolisch ist, kann man die Berechnung in ähnlicher Weise durchführen, indem man etwa $p(x, y)$ (s. (96)) auf Hauptachsen transformiert. $x, y \rightarrow \bar{x}, \bar{y}$, durch eine Streckung $\bar{x}, \bar{y} \rightarrow \xi, \eta$ $p(x, y)$ auf die Form $\pm (\xi^2 - \eta^2)$ bringt und als Neutralisatorfunktion

$$N_i(x, y) = N_i(\xi) N_i(\eta)$$

$$N_i(\xi) = w\left(\pm \frac{\xi}{\varepsilon_i}\right); \quad \xi \geq 0; \quad N_i(\eta) = w\left(\pm \frac{\eta}{\varepsilon_i}\right); \quad \eta \geq 0 \quad (131)$$

eingführt, wobei $w(x)$ durch (9) definiert ist und B_i das Quadrat $-\varepsilon_i \leq \xi \leq \varepsilon_i$; $-\varepsilon_i \leq \eta \leq \varepsilon_i$ bedeutet. Für die Integration nach ξ und η kann man jedesmal die Methode der stationären Phase anwenden ($n_a = 2$, $a = 0$). Die weitere Berechnung und die Ergebnisse sind sehr ähnlich dem Falle $D > 0$.

Der Fall eines parabolischen Flächenpunktes ergibt mathematische Schwierigkeiten, da man hier in $p(x, y)$ auch die Glieder dritter Ordnung mitnehmen muß.

Es soll noch der Fall betrachtet werden, daß ein Punkt stationärer Phase erster Art x_i, y_i auf $S(B)$ liegt (Punkt stationärer Phase dritter Art) und $D > 0$ ist.

Wir grenzen in x_i, y_i ein Gebiet B_1 ab und denken uns das Integral über $B - B_1$ nach den bisher entwickelten Methoden ausgewertet. Das Integral über B_1 formen wir in folgender Weise um:

$$\begin{aligned}
 \iint_{B_1} g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy &= \iint_{B_1} g(x, y) N_i(x, y) N_r(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy + \\
 &+ \iint_{B_1} g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} \{1 - N_r(x, y)\} dx dy + \\
 &+ \iint_{B_1} g(x, y) e^{i\omega f(x, y)} N_r(x, y) (1 - N_i(x, y)) dx dy \quad (132)
 \end{aligned}$$

wobei $N_i(x, y)$ und $N_r(x, y)$ durch (75), (77) gegeben sind. Die einzelnen Integrale werden der Reihe nach mit $V_i + R, J_{R1}, J_{R2}$ bezeichnet.

Das Integral $V_i + R$ ist über das in Abb. 3 schraffiert gezeichnete Gebiet $B_{i,r}$ zu erstrecken. Dieses ist das gemeinsame Gebiet von B_i und B_r (außerhalb $B_{i,r}$ verschwindet der Neutralisator $N_i(x, y) \cdot N_r(x, y)$). Die Integration wird analog zu (97) ff. durchgeführt. Die Integration nach r ergibt Beiträge der unteren und oberen Grenze (0 und $r(\varphi)$), die Integration nach φ daher schließlich Beiträge vom Punkte $r = 0$ (P_i) (Beitrag V_i) und der Begrenzung von $B_{i,r}$ (Beitrag R). Von den einzelnen Teilstücken der Begrenzung 1 bis 5 verschwindet der Beitrag 3 wegen (73), die Beiträge 2 und 4 wegen (72).

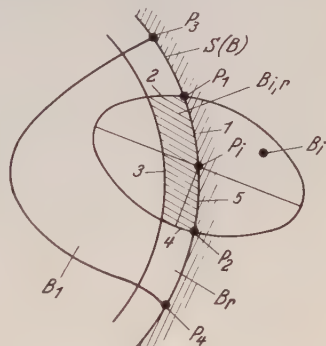


Abb. 3

Da $B_{i,r}$ so klein gewählt werden kann, daß auf den Wegstücken 1 und 5 kein Punkt stationärer Phase zweiter Art liegt, ergeben die Integrale über diese Wegstücke nur Beiträge der Punkte P_1, P_2 und des Punktes P_i . Das Integral J_{R1} kann in üblicher Weise nach oben abgeschätzt werden. J_{R2} ergibt nur Beiträge der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 , die sich gegen die entsprechenden Beiträge von R für B_1 (P_1, P_2), bzw. von R für $B - B_1$ (P_3, P_4) wegheben. P_i selbst gibt zum Integral J_{R2} keinen Beitrag, da für P_i $1 - N_i(x, y)$ verschwindet (und zwar stärker als jede Potenz der Abstände $x - x_i, y - y_i$). Wir erhalten daher nur den Beitrag V_i und den Beitrag des Punktes P_i zu R .

Damit ergibt sich folgendes Berechnungsschema. Zur Berechnung des Beitrages eines Punktes stationärer Phase dritter Art geht man analog wie bei der Berechnung des Beitrages eines Punktes stationärer Phase erster Art vor, nur daß bei der Integration über q nur derjenige Bereich zu umfassen ist, der zu B gehört und fügt noch den Beitrag hinzu, den P_i ergeben würde, wenn er als Punkt stationärer Phase zweiter Art betrachtet wird.

Die Überlegungen sind natürlich von der Bedingung $D > 0$ für P_i unabhängig und können in gleicher Weise durchgeführt werden, wenn ein Punkt stationärer Phase erster Art an einer Unstetigkeitsstelle von $S(B)$ liegt.

Wir führen die Berechnung für V_i aus. Nach (96) ff. wird

$$\begin{aligned} V_i &= \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} \int_{v=0}^{\varepsilon_i} g(x, y) N_i(x, y) N_r(x, y) e^{i\omega f(x, y)} dx dy = \\ &= \frac{2}{+|D|^{1/2}} e^{i\omega f(x_i, y_i)} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} \int_{v=0}^{\varepsilon_i} h[x(r \cos \varphi, r \sin \varphi), y(r \cos \varphi, r \sin \varphi)] \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{W} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_i} \right) e^{\pm i\omega r^2} r dr d\varphi \quad f_{20} \geq 0 \end{aligned} \quad (133)$$

das analog zu (116)

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{+|D|^{1/2}} \sum_{j=0}^{K_1} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^j (j+1) \binom{j}{k} {}_{l,j,k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{2}+2\right)} \cdot \\ &\quad \cdot H_{j,k}(\varphi_1) \cdot \omega^{\frac{j}{2}-1} e^{\pm i\frac{\pi}{2}(j+1)} e^{i\frac{\pi}{2}l} + O(\omega^{-K_1/6-1}) \quad f_{20} \geq 0 \end{aligned} \quad (134)$$

ergibt, wobei

$$H_{j,k}(\varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\pi} \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^k \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^{j-k} d\varphi \quad (135)$$

ist. Durch Anwendung der Transformation (98) erhält man nach einigen Umrechnungen und einer Drehung des Koordinatensystems um $-\varphi_1$:

$$H_{j,k}(\varphi_1) = |2|^{1/2} f_{02}^{k/2} f_{20}^{(j-k)/2} D^{-j/2} \left| \int_0^\pi \cos^k(\varphi + \bar{\varphi}_1) \cos^{j-k}(\varphi + \bar{\varphi}_2) d\varphi \right| \quad (136)$$

Dabei bedeuten

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1 &= \pm \frac{1}{+|D|^{1/2}} (f_{11} + f_{02} \operatorname{tg} \beta) \\ \operatorname{tg} \bar{\varphi}_2 &= \mp \frac{1}{|D|^{1/2}} (f_{11} + f_{20} \operatorname{ctg} \beta) \end{aligned} \right\} \quad f_{20} \geq 0 \quad (137)$$

β bezeichnet den Winkel, den die Tangente an $S(B)$ in $P_l(x_l, y_l)$ mit der x -Achse einschließt. Wenn man noch nach Potenzen von ω ordnet, $j = l + 2t$; $L = K_1$ setzt, erhält man schließlich:

$$V_i = \sum_{l=0}^L A_l(x_i, y_i) \omega^{-(l/2+1)} + O(\omega^{-L/6-1}) \quad (138)$$

$$A_l(x_i, y_i) = \frac{e^{i\omega f(x_i, y_i)}}{\tau |D|^{1/2}} \sum_{l=0}^l \sum_{k=0}^{l+2l} l_{l+2l, k} \frac{\Gamma(l/2 + l + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(l + 2l - k + 1)} \cdot \\ \cdot H_{l+2l, k}(\varphi_1) e^{\pm i \frac{\pi}{2} (l + 2l + 2)} e^{\pm i \frac{\pi}{2} l} \quad (139)$$

wobei die $l_{j, k}$ wieder durch (115) definiert sind.

Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. E. HLAUWA, Wien, für wertvolle mathematische Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Literatur

1. VAN DER CORPUT, Zur Methode der stationären Phase I, *Compositio mathematica* I, S. 15—38. — Zur Methode der stationären Phase II, *Compositio mathematica* III, S. 328—372.
2. E. HLAUWA, Über Integrale auf konvexen Körpern I, *Monatshefte für Mathematik* Bd. 54/1950, 1. Heft.
3. G. BRAUN, Wellenmechanische Elektronenoptik (Integration der SCHRÖDINGERSchen Wellengleichung mit Hilfe asymptotischer Reihen), Dissert. Techn. Hochschule Wien 1954. — W. GLASER und G. BRAUN, Zur wellenmechanischen Theorie der elektronenoptischen Abbildung I, II, *Acta physica Austriaca*, im Druck.

On Drag of Some Bodies in Free Molecule Flow

By

M. Z. v. Krzywoblocki and G. Shinosaki¹

University of Illinois

With 7 Figures

(Received March 1, 1955)

Summary

The authors extend some results of HEINEMAN [4] for the drag on a convex body of some particular shape in the regime of free molecule flow, assuming various laws of reflection. In particular, special attention is paid to the collisions of the molecules reflected from the surface, an item which presents great difficulties of both physical and mathematical nature.

Introduction

With the continuous increase in altitude of flight of modern air vehicle, there arises the fundamental problem of providing an adequate mathematical description of the phenomena occurring at those high altitudes and high velocities of flight, i. e., furnishing the differential, integral, or integral-differential systems enabling one to calculate the velocity and temperature distributions around the moving body. The ultimate goal from the standpoint of practical applications is usually to find the drag of the moving body and the heat transfer. The first item allows one to verify whether the available power is adequate enough to propel the air vehicle; the second item, being perhaps from a technological standpoint more important than the first, allows one to verify whether the material from which the air vehicle is constructed can resist the action of the heating involved in such a high speed motion.

As is well known, above a certain degree of rarefaction of the gas medium in which the air vehicle in question is moving, both the mechanics of continuum and the kinetic theory of gases are not adequate enough to describe the phenomena in the regime in question. In the region of ordinary gas dynamics where $L a^{-1} \ll 1$, L = mean free path, a = a characteristic dimension of the object), attempts to solve the Navier-Stokes differential equations of motion (or EULER's equation when

¹ At present Assistant Engineer A, Weapons Systems Analysis Group, Northrop Aircraft Inc., Hawthorne, California, U.S.A.

viscosity is neglected) subject to the appropriate boundary conditions have met with some success in the domains of linearized equations, supersonic regime, etc. The enormous amount of tests performed in that regime allows one to obtain almost all the information required for practical purposes. In the region where $L a^{-1} < 1, \cong 1$, various attempts have been made to apply the kinetic theory of gases to the solution of the problem in the regime where the collisions between molecules play an important role. Finally, when $L a^{-1} \gg 1$, the "free molecule" regime prevails in which the old Newtonian hypothesis is adjusted i. e., collisions between the molecules of the gas may be neglected as compared with those with the object. For this case, EPSTEIN [2] has obtained the drag on a sphere at very low Mach numbers, ZAHM [16] that on a plate, and TSIEN [15], on an element of surface at all Mach numbers. Several other interesting investigations in that respect are listed in the Bibliography. HEINEMAN [4] derived general formulas for the drag on a convex body of any shape in the region of free molecule flow, assuming various laws of reflection. He also made an attempt to take into account the collisions of the reflected molecules so as to obtain a better approximation to the region where " a " is not entirely negligible compared to L . It is the purpose of the present note to extend some results of HEINEMAN.

1. Fundamental Equations

1.1. The Reflection of Molecules From Surfaces

In the following, a brief discussion of some of the physical principles underlying the free molecule flow theory is given [4].

The momentum transmitted to the object each second depends partly on the way in which the molecules are reflected at the surface. On the basis of experiments, some hypotheses were created concerning the types of reflection which can occur depending on the state and nature of the surface, the kind of gas, the density of the impinging stream and the respective temperatures of the gas and surface.

In specular reflection, the component of the molecular velocity tangential to the surface remains unchanged, but the component normal to the surface reverses its sign. In the diffuse case, the molecules are reflected from the surface in an absolutely random way, all traces of their past history having been lost; they obey a cosine law similar to that of a surface emitting radiant energy. The energy exchange can be expressed by means of an accommodation coefficient α , first introduced by VON SMOLUCHOWSKI and KNUDSEN and defined as:

$$\alpha = (T_i - T_r) (T_i - T_s)^{-1},$$

where T_i is the temperature of the incident stream, T_r that of the reflected stream, and T_s that of a MAXWELLIAN distribution of reflected molecules which is in equilibrium with the surface. Finally, in the case of condensation and re-emission, the molecules condense on the surface

for a time τ after which they are re-emitted in a random way. If τ is of the order of the time of impact, temperature equilibrium with the surface will not be reached and this case should properly be regarded as one of diffuse reflection. In true condensation and re-emission, the number of molecules emitted by the surface each second is not necessarily equal to the number that hit the surface each second. In the following only the cases of specular and diffuse reflection are considered.

1.2. Fundamental Formulas

Let dS' , and dS'' denote an element of area situated on the front side and on the back, respectively, of a convex body of any shape. The x -axis is taken in the direction of the outward normal to dS' , the y - and z -axis being situated in the plane tangent to dS' . The (x, y) -plane can always be taken parallel to the direction of the incoming velocity vector \vec{V} which makes an angle θ with the x -axis. The molecules of a constant mass m possess the velocity components between u and $u + du$, v and $v + dv$, and w and $w + dw$, in x , y , z -directions, respectively. The symbol $f(u, v, w; x, y, z)$ denotes the velocity distribution function near the body. The expression for the total momentum per second D_i of the impinging molecules, derived by HEINEMAN [4] is given in the Appendix; similarly, the expressions for the momentum per second exerted by the reflected molecules $D_r^{(s)}, D_r^{(d)}$ in cases of specular and diffuse reflection, respectively, [4], are given in the Appendix. The symbols denote:

$A \exp(-h_r c^2)$ — the distribution of reflected molecules;

$h_r = m(2K T_r)^{-1}$; T_r — absolute temperature of the reflected stream

which can be determined from the magnitude of α ;

K — BOLTZMANN constant $= 1.37 \times 10^{-16}$ erg per degree; $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$

The magnitudes of A_i and A_b , if the body is a perfect thermal conductor are given in the Appendix. The total drag is:

$$D = D_i + D_r. \quad (1.2.1)$$

2. First Approximation to the Drag

2.1. HEINEMAN's Results

In the first approximation considered by HEINEMAN [4], the effects of intermolecular collisions are neglected, at infinity the distribution function is assumed to be MAXWELLIAN and the molecules are monatomic. Hence, at infinity, the distribution function f , being MAXWELLIAN, has the form:

$$f = f^{(M)} = N (h\pi^{-1})^{3/2} \exp \left\{ -h [(u + V \cos \theta)^2 + (v + V \sin \theta)^2 + w^2] \right\} \quad (2.1.1)$$

the symbol N denoting the number density. At the boundary, $f = f^{(M)} + f^{(R)}$ where $f^{(R)}$ is the distribution function of the reflected stream. In a straight forward manner HEINEMAN applies formulas (1) through (5)

to calculate the drag of the following bodies for two cases (specular and diffuse reflection): (i) flat plate perpendicular to the free stream; (ii) sphere; (iii) cylinder when the free stream velocity is perpendicular to the principal axis of the cylinder; (iv) right circular cone when the free stream velocity is parallel to the axis of the cone; (v) prolate ellipsoid when the free stream velocity is parallel to the major axis of the ellipsoid.

2.2. Authors' Results for Paraboloid of Revolution

Equations (1), (2), (3) in Appendix jointly with eq. (2.1.1) are applied to calculate the drag of paraboloid of revolution with its axis parallel to the free stream velocity.

The curvilinear coordinates are used to describe the paraboloid of revolution. From [14 a] the equations of the family of paraboloids of revolution in these coordinates (see Fig. 1 and Fig. 2) are:

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (x'^2 - y'^2)^{1/2} - x'; \\ \eta^2 &= (x'^2 - y'^2)^{1/2} + x'; \end{aligned} \quad (2.2.1a)$$

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2); \\ \eta^2 &= \xi \eta. \end{aligned} \quad (2.2.1b)$$

Fig. 1 shows the curves $\xi^2 = \text{const.}$ in the $\{x', y'\}$ -coordinate system; and $\eta^2 = \text{const.}$; this is an orthogonal set of parabolas: $y'^2 = \pm 2x'c - c^2$, $x' = \text{const.}$ Take the derivative of the first equation (2.2.1a) with

respect to x' for $\xi^2 = \text{const.}$ Denoting by $dy'/dx' = \tan \alpha$, the slope of the curve $\xi = \text{const.}$, inserting the first equation (2.2.1a) back into the result of differentiation, furnishes the expression:

$$\tan \alpha = \xi^2 (y')^{-1}; \quad (2.2.2)$$

with the use of the second equation (2.2.1b) this reduces to:

$$\tan \alpha = \xi \eta^{-1}. \quad (2.2.3)$$

From Fig. 2 it is seen that:

$$\tan \alpha = \xi \eta^{-1} = \tan \left(\frac{1}{2} \pi - \theta \right) = \text{ctg } \theta; \quad \eta = \xi \tan \theta. \quad (2.2.4)$$

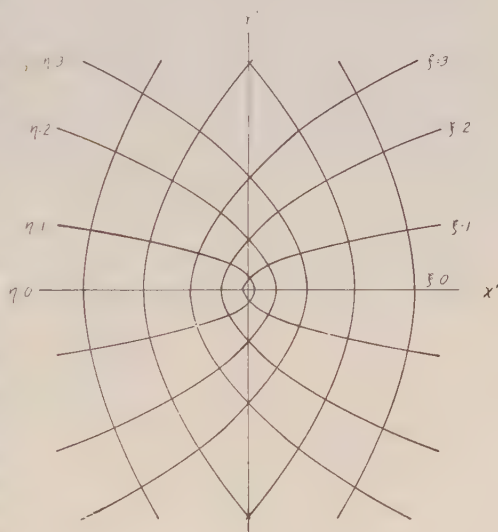


Fig. 1. Coordinate Systems

Inserting this value into eqs. (2.2.1b) furnishes:

$$x' = \frac{1}{2} \xi^2 (\tan^2 \theta - 1); \quad y' = \xi^2 \tan \theta. \quad (2.2.5)$$

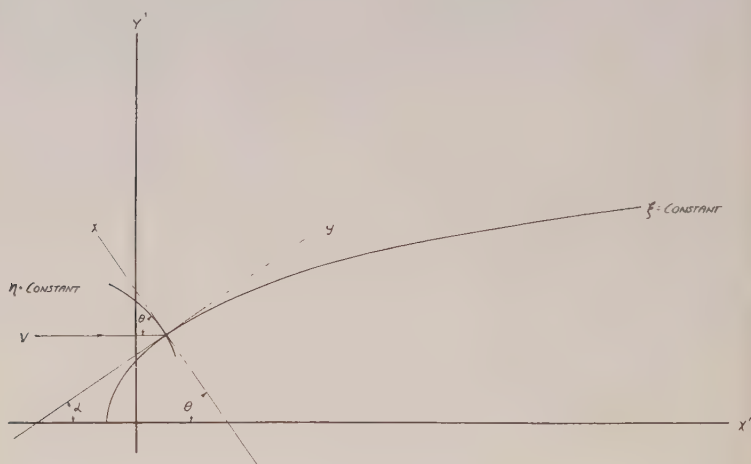


Fig. 2. Coordinate Systems

The element of the arc of a curve is given as $dA = [1 + (dy'/dx')^2]^{1/2} dx'$. Inserting eq. (2.2.3) and the differential $dx' = \xi^2 (\tan \theta) (\sec^2 \theta) d\theta$ for

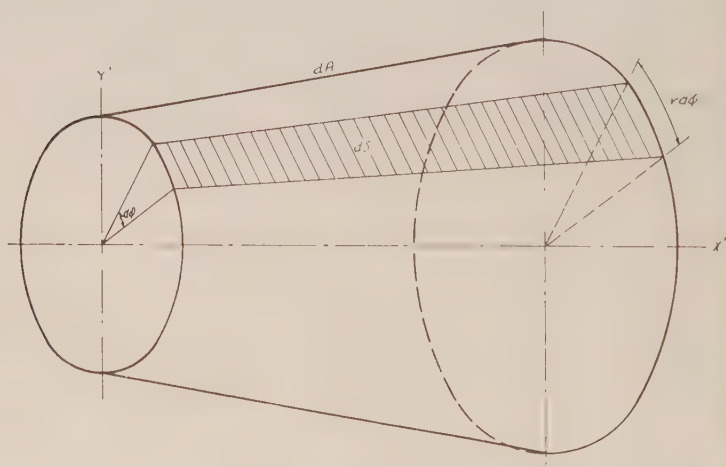


Fig. 3. Element of an Area

$\xi^2 = \text{const.}$ obtained from eq. (2.2.5), into the expression for dA , gives the result:

$$dA = \xi^2 \sec^3 \theta d\theta. \quad (2.2.6)$$

From Fig 3 it is seen that the element of an area dS can be expressed as $dS = r dA dq = y' dA dq$. Using eqs. (2.2.5) and (2.2.6) and integrating over φ from 0 to 2π furnishes the result:

$$\int dS = 2\pi \xi^4 \int_0^{\theta_0} (\tan \theta) (\sec^3 \theta) d\theta, \quad (2.2.7)$$

the magnitude of the angle θ_0 depending upon the size of the part of the paraboloid of revolution in question. Considering the drag D_i due to the front surface only, with $dS' = dS$, i. e., neglecting the part of the drag due to dS'' , using formula (1) in Appendix, eqs. (2.1.1), (2.2.7), and the integrals collected in Appendix, and integrating eq. (1) successively over w , v , and u , furnishes the formula for D_i (5a) given in Appendix.

a) Specular Reflection and the Total Drag

Using eq. (2) in Appendix, eq. (2.1.1), integrating successively with respect to w , v and u and neglecting the drag due to dS'' , furnishes the expression for $D_i^{(s)}$, eq. (5c) in Appendix. With $h = m (2KT)^{-1}$, $K = mR$, R = the universal gas constant, $\gamma = c_p c_v^{-1}$, $a^2 = \gamma RT$,

a = the velocity of sound, $M = V a^{-1}$, $\int_0^z \exp(-z^2) dz = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \operatorname{erf} z$,

with the use of eqs. (1.2.1) and (2.2.7) the total drag is equal to:

$$D = -2mN\pi^{1/2}h^{-1}\xi^4 \int_0^{\theta_0} \left\{ \left(\frac{1}{2}\gamma \right)^{1/2} M \tan \theta \sec \theta \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \gamma M^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{1}{2} \pi^{1/2} \tan \theta (\gamma M^2 + \sec^2 \theta) (1 + \operatorname{erf} z) \right\} d\theta. \quad (2.2.8)$$

Expressing the drag in the usual form:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S c_D; \quad \rho = mN; \quad (2.2.9)$$

with S denoting the frontal area equal to $\pi y'^2 = \pi \xi^4 \tan^2 \theta_0$, one can easily calculate the value of the drag coefficient:

$$c_D = 8(\gamma M^2 \pi^{1/2} \tan^2 \theta_0)^{-1} \int_0^{\theta_0} \left\{ \left(\frac{1}{2}\gamma \right)^{1/2} M \tan \theta \sec \theta \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \gamma M^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{1}{2} \pi^{1/2} \tan \theta (\gamma M^2 + \sec^2 \theta) (1 + \operatorname{erf} z) \right\} d\theta. \quad (2.2.10)$$

Applying SIMPSON's numerical integration method, eq. (2.2.10) has been plotted on Fig. 4 for $\theta_0 = 80^\circ 12' = 1.4$ radians.

b) Diffuse Reflection and the Total Drag

Using eq. (3) in Appendix, and the values of A_i and A_b , calculated in [4] and given in Appendix (eqs. 5d, 5e), neglecting dS'' , and integrating successively over w , v , and u , furnishes the value of $D_r^{(d)}$, given in Appendix (5g). With $D = D_i + D_r^{(d)}$ and with the previously given expression for the drag coefficient, its value is given by the formula:

$$c_D = 4 (\tan^2 \theta_0)^{-1} \int_0^{\theta_0} \left\{ \frac{1}{2} \tan \theta \sec^2 \theta \left[\left(\frac{1}{2} \gamma \right)^{-1/2} (M_i \pi^{1/2})^{-1} \sec \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma^{-1} (M_i M_r)^{-1} \left| \exp \left(-\frac{1}{2} \gamma M_i^2 \cos^2 \theta \right) + \frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta \left[1 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \operatorname{erf} \left(\left(\frac{1}{2} \gamma \right)^{1/2} M_i \cos \theta \right) \left[\gamma^{-1} M_i^{-2} \sec \theta (\gamma M_i^2 + 1) + \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \pi^{1/2} M_r^{-1} (2\gamma)^{-1/2} \right] \right] \right\} d\theta. \quad (2.2.11)$$

Using numerical integration the diagram of eq. (2.2.11) for $\theta_0 = 1.4$ radians is shown in Fig. 4.

3. Second Approximation to the Drag

3.1. HEINEMAN'S Results

In the first approximation, the assumption is made that the reflected molecules are, on the average, so distant from the object before colliding with other molecules, that the effect of these collisions on the velocity distribution function in the neighborhood of the object is not appreciable. HEINEMAN [4] calculates the next approximation by taking into account those molecules that collide once in the gas after reflection from the body. Let $D^{(0)}$ be the drag if collisions are neglected, $D^{(1)}$, the part of the drag if one collision is taken into account, $D^{(n)}$, if n collisions are

taken into account. The total drag $D = \sum_{i=0}^{\infty} D^{(i)}$. The gas is assumed to

be monatomic and to consist of hard, spherical atoms of diameter σ [4]. The boundary conditions on the distribution function at infinity are

$$f^{(M)} = N \delta_v^u \delta_0^v \delta_0^w; \quad f^{(R)} = 0, \text{ where } \delta_{x'}^x = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x'; \\ 0 & \text{if } x \neq x'. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

The symbol N denotes the number density. Now $D^{(1)} = D_R^{(1)} + D_M^{(1)}$ where $D_R^{(1)}$ and $D_M^{(1)}$ are the respective increases in the drag due to the $f^{(R)}$ and $f^{(M)}$ molecules that collide once in the gas. HEINEMAN [4] calculated the $D^{(1)}$ for the case of a plate at very high Mach number moving in a direction normal to its plane. The reflection at the plate

is assumed to be specular. In the approximation considered by HEINEMAN [4], the collisions occur solely between $f^{(M)}$ and $f^{(R)}$ distributions. The analysis involves fundamentally the calculation of the number of reflected molecules that hit the plate each second after one collision in the gas. Then, knowing the momentum of each of these molecules, the drag can be obtained [4]. The general scheme of the reflection of a molecule is presented in Fig. 5.

The final result obtained by HEINEMAN [4] is:

$$D^{(1)} = -0,2\pi^2 m N^2 \sigma^2 a^2 V^2 \cdot \{a - 20 [x_V - a^2 (4 x_V)^{-1} - 0,2 a]\}. \quad (3.1.2)$$

Below, the authors generalize the results by HEINEMAN to the case of a flat plate inclined to the incoming stream. Since this development is along the same line as that

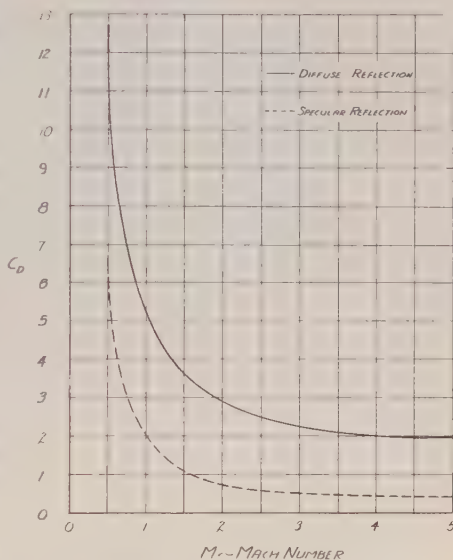


Fig. 4. Coefficient of Drag for Paraboloid of Revolution in Highly Rarefied Gases

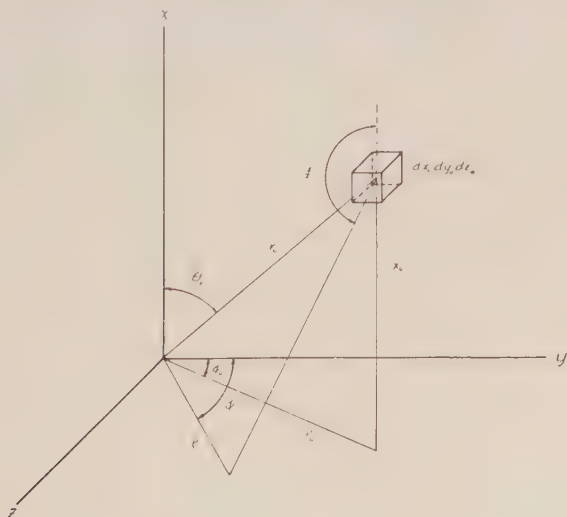


Fig. 5. Reflection of a Molecule

given by HEINEMAN [4], the equation (3.1.2) represents a particular case of the more general problem presented by the authors.

3.2. Fundamental Physical Concepts of Flow in Highly Rarefied Gases

The fundamental concepts of flow in highly rarefied gases can be found in any textbook on kinetic theory of gases. To begin with, assume a system of two molecules, one incoming with the velocity V_i and another molecule reflected specularly from the plate with a velocity V_r , inclined at an angle θ to the normal of the plate which is fixed with respect to a Cartesian coordinate system located in the space. For the purpose of analysis, it is convenient to replace the above system of two moving molecules by a system in which the incoming molecule is assumed to be fixed in space and the reflected molecule moves with the resultant velocity V_R . From Fig. 6 one has:

$$V_R^2 = V_i^2 + V_r^2 - 2 V_i V_r \cos (180^\circ - 2\theta) = V_i^2 + V_r^2 + 2 V_i V_r \cos 2\theta. \quad (3.2.1)$$

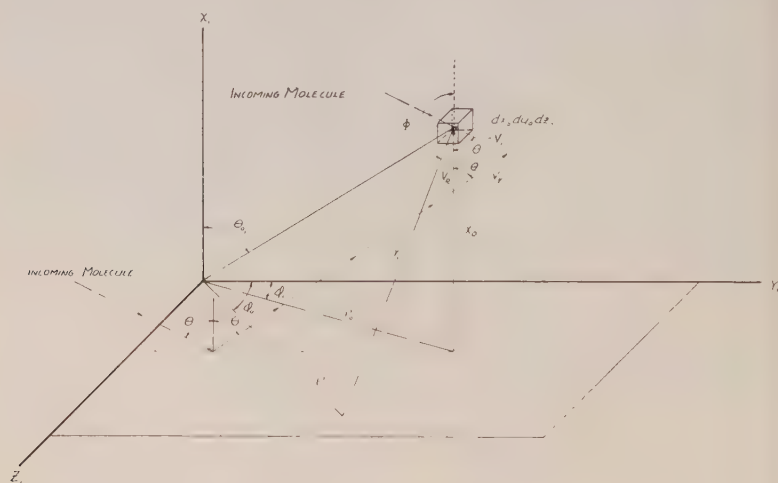


Fig. 6. Reflection of a Molecule

But since the reflection of the molecules from the surface of the plate is assumed specular:

$$|\vec{V}_i| = |\vec{V}_r| = |\vec{V}|; \quad V_R^2 = 2 V^2 (1 + \cos 2\theta). \quad (3.2.2)$$

Since $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 (\theta/2)$, eq. (3.2.2) can be written in the form:

$$V_R^2 = 4 V^2 \cos^2 \theta; \quad V_R = 2 V \cos \theta. \quad (3.2.3)$$

This resultant velocity is in the direction normal to the plate; for the proof of this see Appendix 1. Using the kinematic system consisting of the inclined plate and the resultant velocity V_R , the mean free path length $L_{(M)}$ can be derived. Let $\bar{\theta}$ — collision rate; \bar{V} — average speed of a molecule. Then in a period of time " t ", a molecule would move a distance $\bar{V}t$. But this distance is broken up by $\bar{\theta}t$ collisions into free

baths of average length $L_{(M)}$. Therefore, $\bar{V} t = t \bar{\theta} L_{(M)}$ or $L_{(M)} = \bar{V} \bar{\theta}^{-1}$. But $\bar{\theta} = N S \bar{V}'$, [9a, p. 104], where the symbols used denote: N — molecular number density; S — mutual collision cross section; \bar{V}' — velocity at which the molecules approach each other. For the particular case of interest one has: $\bar{V}' = 2 V \cos \theta$, $\bar{V} = V$, $S = \pi \sigma^2$; therefore:

$$L_{(M)} = (2 \sigma^2 \pi N \cos \theta)^{-1}, \quad (3.2.4)$$

which reduces to that one used by HEINEMAN [4] for $\theta = 0$. The solid angle scattering coefficient $G(\theta)$ is given in [9a, p. 119] as $G(\theta) = \frac{1}{4} \sigma^2$. Now, let N be the density of the $f^{(M)}$ (incoming) molecules, and $L_{(M)}$ the mean free path of an $f^{(R)}$ molecule in the $f^{(M)}$ distribution. Using the exponential distribution assumed by HEINEMAN [4], the density of the $f^{(R)}$ molecules at a distance x_{01} from the plate is:

$$\text{density} = N [\exp(-x_{01} L_{(M)}^{-1})] \cos \theta. \quad (3.2.5)$$

For the derivation of this formula see Appendix 2.

3.3. Calculation of $D_R^{(1)}$

The number of collisions per second resulting in an $f^{(R)}$ molecule being scattered into a solid angle $d\Omega$ at an angle Φ with the direction of the resultant velocity is:

$$N \{N [\exp(-x_{01} L_{(M)}^{-1})] \cos \theta\} \left(\frac{1}{4} \sigma^2\right) (2 V \cos \theta) d\Omega dx_{01} dy_{01} dz_{01}; \quad (3.3.1)$$

or

$$\frac{1}{2} N^2 \sigma^2 V \cos^2 \theta [\exp(-x_{01} L_{(M)}^{-1})] d\Omega dx_{01} dy_{01} dz_{01}, \quad (3.3.1a)$$

From Fig. 6 one has:

$$dy_{01} dz_{01} = \varrho_{01} d\varrho_{01} d\varphi_{01}$$

and

$$d\Omega = (\varrho_1 r_1^{-2} d\varrho_1 d\varphi_1) \cos(180^\circ - \Phi) = -\varrho_1 r_1^{-2} \cos \Phi d\varrho_1 d\varphi_1;$$

$$\text{but } \cos \Phi = -x_{01} r_1^{-1}, \text{ and}$$

$$r_1 = [x_{01}^2 + \varrho_1^2 + \varrho_{01}^2 - 2 \varrho_{01} \varrho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_{01})]^{1/2}. \quad (3.3.2)$$

Since the molecules are assumed to be perfectly elastic, the velocity of the $f^{(R)}$ molecules along x_{01} after they collide with the incoming molecules is $2 V \cos \theta$; the component of this velocity along r_1 is obviously $2 V \cos \theta \cos \Phi$. Now $D_R^{(1)}$ can be calculated by multiplying the expression (3.3.1a) by the mass of a molecule " m " by $2 V \cos \theta \cos \Phi$ and by an absorption factor. As the gas is in a steady state, the number of molecules hitting the plate each second is equal to expression (3.3.1a) multiplied by an exponential absorption factor $\exp(-r_1 L_{R,M}^{-1})$, where $L_{R,M}$ is the mean free path of the molecule in the $f^{(M)}$ and $f^{(R)}$ distributions [4]. But since both L_M and $L_{M,R}$ are often very much larger than the radius of the plate " a ", and since most of the molecules that strike the object

will in all probability collide again at distances x_{01} which are much smaller than either L_M or $L_{M,R}$, the exponential terms can be assumed to be equal to unity for those cases. Therefore inserting all the above expressions (3.3.2), etc., into the expression (3.3.1a) furnishes the equation for $D_R^{(1)}$:

$$D_R^{(1)} = -m N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta \int_0^a d\varrho_1 \int_0^a d\varrho_{01} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cdot \quad (3.3.3)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_{01} \int_0^\infty dx_{01} x_{01}^2 \varrho_1 \varrho_{01} [x_{01}^2 + \varrho_1^2 + \varrho_{01}^2 - 2 \varrho_{01} \varrho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_{01})]^{-2}.$$

Obviously, $D_R^{(1)}$ is in the direction normal to the plate. Here, the momentum per second exerted by the specularly reflected molecules has been taken into account. The particular steps of the integration must be solved. The integration over x_{01} can be represented as:

$$I_1 = \int_0^\infty b x_{01}^2 (x_{01}^2 + a)^{-2} dx_{01}; \quad (3.3.4)$$

with:

$$b = \varrho_1 \varrho_{01}; \quad (3.3.4a)$$

$$a = \varrho_1^2 + \varrho_{01}^2 - 2 \varrho_{01} \varrho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_{01}), \quad (3.3.4b)$$

with the result:

$$I_1 = \frac{1}{4} \pi a^{-1/2} b. \quad (3.3.5)$$

Following the HEINEMAN technique [4], as only the difference $(\varphi_1 - \varphi_{01})$ occurs in the formula, the coordinate axes may be rotated so that φ_{01} , for example, becomes equal to π . Then the denominator in the integrand becomes $[(\varrho_1 + \varrho_{01})^2 - 4 \varrho_1 \varrho_{01} \sin^2(\varphi_1/2)]^{1/2}$ with $1 - \cos \varphi_1 = 2 \sin^2(\varphi_1/2)$. Integrating over φ_{01} furnishes the expression:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho_{01} \varrho_1 (\varrho_{01} + \varrho_1)^{-1} [1 - 4 \varrho_{01} \varrho_1 (\varrho_{01} + \varrho_1)^{-2} \sin^2(\varphi_1/2)]^{-1/2} d\varphi_1. \quad (3.3.6)$$

With $a = \frac{1}{2} \varphi_1$, and $I_2 = \int_0^\pi \cdots [\cdots \sin^2 a]^{-1/2} da$, the integral in a is

an elliptic integral of the first kind:

$$\int_0^\pi (1 - K^2 \sin^2 a)^{-1/2} da = \pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 K^4 + \cdots \right], \quad (3.3.7)$$

for $K^2 < 1$, where:

$$K^2 \equiv 4 \varrho_{01} \varrho_1 (\varrho_{01} + \varrho_1)^{-2} \leq 1. \quad (3.3.7a)$$

Only the first term of the expansion (3.3.7) is used, which gives the expression:

$$I_3 = \int_0^a \varrho_{01} \varrho_1 (\varrho_{01} + \varrho_1)^{-1} d\varrho_{01}, \quad (3.3.8)$$

which can be integrated by elementary method. The integration over ϱ_1 is indicated in equations (6) to (12) in the Appendix. The final result is:

$$D_R^{(1)} = -m\pi^3 N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta \frac{2}{3} a^3 (1 - \ln 2), \quad (3.3.9)$$

or

$$D_R^{(1)} = -0,20456 m\pi^3 a^3 N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta. \quad (3.3.9a)$$

3.4. Calculation of $D_M^{(1)}$

Now, the drag exerted by the $f^{(M)}$ molecules with which the $f^{(R)}$ molecules have collided has to be taken into account. This is also given by expression (3.3.9a). Hence, the increase in drag is this expression from which is subtracted the drag which these $f^{(M)}$ molecules would have exerted had they not collided [4]. This latter term is the expression (3.3.1a) multiplied by $m V \cos \theta$, the momentum of an incoming molecule, and integrating as done previously. The result is:

$$-0,40913 m\pi^2 a^3 N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta, \quad (3.4.1)$$

and the partial increase in drag is then:

$$D_R^{(1)} + 0,40913 m\pi^2 a^3 N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta. \quad (3.4.2)$$

In addition to the drag components mentioned above, one must also take into account the partial drag that would have been exerted by those $f^{(M)}$ molecules that were prevented from reaching the plate after one collision. This term is:

$$m N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta (M_1 + M_2), \quad (3.4.3)$$

where:

$$M_1 = \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^{2\pi} dq_{01} \int_0^a d\varrho_{01} \int_0^{x_V} dx_{01} [\varrho_{01} \exp(-x_{01} L_M^{-1})]; \quad (3.4.3a)$$

$$M_2 = - \int_0^a d\varrho_{01} \int_0^a d\varrho_1 \int_0^{2\pi} dq_{01} \int_0^{2\pi} dq_1 \int_0^{x_V} dx_{01} \cdot x_{01} \varrho_1 \cdot \varrho_{01} [x_{01}^2 + \varrho_1^2 + \varrho_{01}^2 - 2\varrho_1 \varrho_{01} \cos(\varphi_1 - \varphi_{01})]^{-3/2}. \quad (3.4.3b)$$

The symbol x_V denotes the distance travelled by the molecules in one second. The first integral M_1 is the drag that would have been exerted by those $f^{(M)}$ molecules that are scattered into a solid angle 4π after one collision and which are situated in the cylinder having the plate as base and x_V as height [4]. The second integral M_2 has a similar meaning for

those molecules that are scattered into the solid angle subtended by the plate [4]. Now, the first integral furnishes the expression:

$$M_1 = 4\pi^2 a^2 L_M [1 - \exp(-x_V L_M^{-1})]. \quad (3.4.4)$$

Using the series expansion in eq. (3.4.4):

$$\begin{aligned} \exp x &= 1 + \frac{1}{1!} x + \\ &+ \frac{1}{2!} x^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

and retaining only the first two terms, furnishes the result:

$$M_1 = 4\pi^2 a^2 x_V. \quad (3.4.6)$$

The integration of the second term M_2 was performed with an extreme accuracy due to the reason given below. The various steps of integration are given in Appendix (13) to (21). The result is:

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{16}{9} \pi^2 a^4 x_V^{-1} - \\ &- 0,81826 \pi^2 a^3. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

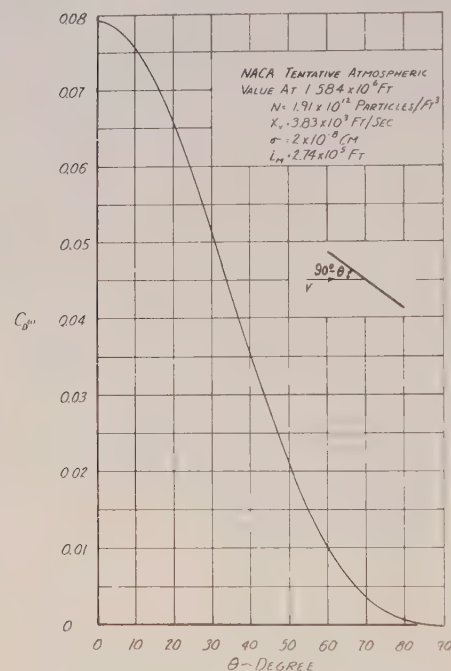


Fig. 7. Contribution of the Second Approximation to the Drag of a Flat Plate in Highly Rarefied Gases

Inserting eqs. (3.4.6) and (3.4.7) into eq. (3.4.3) furnishes the result:

$$4 m N^2 \sigma^2 V^2 \cos^3 \theta \pi^2 a^2 \left(x_V - \frac{4}{9} a^2 x_V^{-1} - 0,20457 a \right). \quad (3.4.8)$$

Now subtract expression (3.4.8) from expression (3.4.2) to get $D^{(1)}$:

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= -0,2\pi^2 m N^2 \sigma^2 a^2 V^2 \cos^3 \theta \left[(\pi - 2) a + \right. \\ &\left. + 20 \left(x_V - \frac{4}{9} a^2 x_V^{-1} - 0,20457 a \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

For $\theta = 0$, eqs. (3.4.8) and (3.4.9) differ considerably from the corresponding eqs. (24) and (25) in [4] and eq. [3.1.2] above which would imply that there are some misprints in [4]. It is interesting to note that the second approximation to the drag no longer depends on the Mach number, but on the angle of inclination of the plate to the incoming

stream, on the diameter of the plate and on the properties of the molecule. Fig. 7 presents the drag coefficient calculated from eqs. (2.2.9), (3.4.9) for a round flat plate; only the term free from the radius of the plate is considered.

Appendix

$$D_i = -m \left\{ \int dS' \int_{-\tau}^0 du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot u (u \cos \theta + v \sin \theta) \cdot f(u + V \cos \theta, v + V \sin \theta, w; x, y, z) - \int_0^{\infty} dS'' \int_{-\infty}^0 du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot u (u \cos \theta + v \sin \theta) \cdot f(u + V \cos \theta, v + V \sin \theta, w; x, y, z) \right\}; \quad (1)$$

$$D_r^{(s)} = -m \left\{ \int_0^{\infty} dS' \int_{-\infty}^0 du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot u (u \cos \theta + v \sin \theta) \cdot f(u - V \cos \theta, v + V \sin \theta, w; x, y, z) - \int_{-\infty}^0 dS'' \int_{-\infty}^0 du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot u (u \cos \theta + v \sin \theta) \cdot f(u - V \cos \theta, v + V \sin \theta, w; x, y, z) \right\}; \quad (2)$$

$$D_r^{(d)} = -m \left\{ \int_0^{\infty} dS' \int_{-\tau}^0 du \int_{-\tau}^{\tau} dv \int_{-\tau}^{\tau} dw A_f \cdot u (u \cos \theta + v \sin \theta) \exp(-h_r c^2) - \int_{-\tau}^0 dS'' \int_{-\tau}^0 du \int_{-\tau}^{\tau} dv \int_{-\tau}^{\tau} dw A_b \cdot u (u \cos \theta + v \sin \theta) \exp(-h_r c^2) \right\}; \quad (3)$$

$$A_f \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot u \cdot \exp(-h_r c^2) - \int_0^{\tau} du \int_{-\tau}^{\tau} dv \int_{-\tau}^{\tau} dw \cdot u \cdot f(u + V \cos \theta, v + V \sin \theta, w; x, y, z); \quad (4)$$

$$A_b \int_{-\infty}^0 du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot u \cdot \exp(-h_r c^2) - \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\tau}^{\tau} dw \cdot u \cdot f(u + V \cos \theta, v + V \sin \theta, w; x, y, z); \quad (5)$$

$$D_i = -m N (h \pi^{-1})^{1/2} \int dS' \left\{ (\cos \theta) h^{-1} \left[\frac{1}{2} V \cdot \cos \theta \cdot \exp(-h V^2 \cdot \cos^2 \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + h^{1/2} \left(V^2 h \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \pi^{1/2} + \int_0^z \exp(-z^2) dz \right) \right] + V^2 (2h)^{-1} \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin^2 \theta \left[\exp(-h V^2 \cos^2 \theta) + 2 V h^{1/2} \cos \theta \left(\frac{1}{2} \pi^{1/2} + \int_0^z \exp(-z^2) dz \right) \right] \right\}; \quad (5a)$$

$$z^2 = h V^2 \cos^2 \theta; \quad (5b)$$

$$D_r^{(s)} = -m N (h \pi^{-1})^{1/2} \int dS' \left\{ h^{-1} \cdot \cos \theta \cdot \left[\frac{1}{2} V \cdot \cos \theta \cdot \exp(-z^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + h^{-1/2} \left(\frac{1}{2} + h V^2 \cos^2 \theta \right) \left(\frac{1}{2} \pi^{1/2} + \int_{-z}^0 \exp(-z^2) dz \right) \right] - \right. \\ \left. - V \cdot \sin^2 \theta \cdot (2h)^{-1} \left[\exp(-z^2) + 2 h^{1/2} V \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{1}{2} \pi^{1/2} + \int_{-z}^0 \exp(-z^2) dz \right) \right] \right\}; \quad (5c)$$

$$A_i = \pi^{-3/2} N h_i^{1/2} h_r^2 \left\{ (\pi h_i^{-1})^{1/2} V \cos \theta + h_i^{-1} \exp(-h_i V^2 \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + 2 V \cdot \cos \theta \cdot \int_0^{V \cos \theta} \exp(-h_i u^2) du; \right. \quad (5d)$$

$$A_b = \pi^{-3/2} N h_i^{1/2} h_r^2 \left\{ (\pi h_i^{-1})^{1/2} V \cos \theta + h_i^{-1} \exp(-h_i \cdot \right. \\ \left. \cdot V^2 \cos^2 \theta) + 2 V \cdot \cos \theta \cdot \int_0^{V \cos \theta} \exp(-h_i u^2) du; \right. \quad (5e)$$

$$h_i = m(2 K T_i)^{-1} \text{ (incoming); } h_r = m(2 K T_r)^{-1} \text{ (reflected); } \quad (5f)$$

$$D_r^{(d)} = -\frac{1}{2} m N (h_i h_r)^{-1/2} \pi^{1/2} \int_0^{\theta_0} \left\{ \pi^{1/2} \left(\frac{1}{2} \gamma \right)^{1/2} M_i \tan \theta \sec \theta \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[1 + \operatorname{erf} \left(\left(\frac{1}{2} \gamma \right)^{1/2} M_i \cos \theta \right) \right] + \tan \theta \cdot \sec^2 \theta \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \gamma M^2 \cos^2 \theta \right) \right\} d\theta; \quad (5g)$$

$$\int_0^a [a \varrho_1 - \varrho_1^2 \ln(a + \varrho_1) + \varrho_1^2 \ln \varrho_1] d\varrho_1 = L_1 + L_2 - L_3; \quad (6)$$

$$L_1 = \int_0^a a \varrho_1 d\varrho_1 = \frac{1}{2} a^3; \quad (7)$$

$$L_2 = \int_0^a \varrho_1^2 \ln \varrho_1 d\varrho_1 = \varrho_1^3 \left[\frac{1}{3} \ln \varrho_1 - \frac{1}{9} \right]_0^a; \quad (8)$$

Application of L'Hospital rule gives:

$$\varrho_1^3 \ln \varrho_1 = \ln \varrho_1 (\varrho_1^{-3})^{-1} = \frac{\infty}{\infty}; \quad (9)$$

$$\lim_{\varrho_1 \rightarrow 0} \varrho_1^{-1} / (-3 \varrho_1^{-4}) = 0; \quad (10)$$

$$L_2 = \frac{1}{3} a^3 \ln a - \frac{1}{9} a^3; \quad (11)$$

$$L_3 = -\frac{5}{18} a^3 + \frac{2}{3} \ln 2 a - \frac{1}{3} a^3 \ln a; \quad (12)$$

Integration with respect to x_{01} furnishes:

$$-K(x_V^2 + b)^{-1/2} + K b^{-1/2}; \quad K = -\varrho_1 \varrho_{01};$$

$$b^2 = \varrho_1^2 + \varrho_{01}^2 - 2 \varrho_1 \varrho_{01} \cos(\varphi_1 - \varphi_{01}); \quad (13)$$

4) The second integral (13) is:

$$\int_0^a d\varrho_{01} \int_0^a d\varrho_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_{01} \cdot \varrho_1 \varrho_{01} [\varrho_1^2 + \varrho_{01}^2 - 2 \varrho_{01} \varrho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_{01})]^{-1/2} =$$

$$= -0,81826 \pi^2 a^3;$$

5) The integration of the first integral (13) with respect to φ_{01} after a rotation to $\varphi_{01} = \pi$ gives 2π ;

6) With $a = \frac{1}{2} \varphi_1$, the integral over a is an elliptical integral; preserving only the first term in the expansion furnishes:

$$4\pi^2 \int_0^a d\varrho_{01} \int_0^a d\varrho_1 \cdot \varrho_1 \varrho_{01} [x_V^2 + (\varrho_1 + \varrho_{01})^2]^{-1/2};$$

7) Integrating (16) with respect to ϱ_1 furnishes:

$$\pi^2 \left\{ \int_0^a \varrho_{01} [x_V^2 + (a + \varrho_{01})^2]^{1/2} d\varrho_{01} - \int_0^a \varrho_{01} [x_V^2 + \varrho_{01}^2]^{1/2} d\varrho_{01} - \int_0^a \varrho_{01}^2 \sinh^{-1}(a + \varrho_{01}) x_V^{-1} d\varrho_{01} + \int_0^a \varrho_{01}^2 \sinh^{-1}(\varrho_{01} x_V^{-1}) d\varrho_{01} \right\};$$

(18) The first integral in (17) furnishes:

$$\frac{1}{3} x_V^2 (x_V^2 + 4a^2)^{1/2} + \frac{1}{3} a^2 (x_V^2 + 4a^2)^{1/2} - \frac{1}{2} a x_V^2 \sinh^{-1} (2a x_V^{-1}) - \frac{1}{3} x_V^2 (x_V^2 + a)^{1/2} + \frac{1}{6} a^2 (x_V^2 + a^2)^{1/2} + \frac{1}{2} a x_V^2 \sinh^{-1} (a x_V^{-1});$$

(19) The second integral in (17) furnishes:

$$\frac{1}{3} x_V (x_V^2 + a^2)^{1/2} + \frac{1}{3} a^2 (x_V^2 + a^2)^{1/2} - \frac{1}{3} x_V^3;$$

(20) The third integral in (17) furnishes:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} a^3 \sinh^{-1} (2a x_V^{-1}) - \frac{4}{9} a^2 (x_V^2 + 4a^2)^{1/2} + \frac{2}{9} x_V^2 (x_V^2 + 4a^2)^{1/2} - \\ & - \frac{1}{3} a^3 \sinh^{-1} (a x_V^{-1}) + \frac{11}{18} a^2 (x_V^2 + a^2)^{1/2} - \frac{2}{9} x_V^2 (x_V^2 + 4a^2)^{1/2} - \\ & - \frac{1}{2} a x_V^2 \sinh^{-1} (2a x_V^{-1}) + \frac{1}{2} a x_V^2 \sinh^{-1} (a x_V^{-1}); \end{aligned}$$

(21) The fourth integral in (17) furnishes:

$$\frac{1}{3} a^3 \sinh^{-1} (a x_V^{-1}) - \frac{1}{9} a^2 (a^2 + x_V^2)^{1/2} + \frac{2}{9} x_V^2 (x_V^2 + a^2)^{1/2} - \frac{2}{9} x_V^3;$$

(22) Apply the binomial theorem to all square roots in (18) to (21) and retain only the first two terms in each expansion, then (17) becomes:

$$\frac{16}{9} \pi^2 a^4 x_V^{-1};$$

(23) Insert (14) and (22) into (13);

$$- \frac{16}{9} \pi^2 a^4 x_V^{-1} = 0,81826 \pi^2 a^3.$$

List of Integrals

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp (-h x^2) dx = (\pi h^{-1})^{1/2}; \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-h (x \pm b)^2] dx = (\pi h^{-1})^{1/2}; \\ & \int_{-\infty}^{\infty} x \exp [-h (x \pm b)^2] dx = \mp (\pi h^{-1})^{1/2} b; \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^0 x^2 \exp [-h(x+b)^2] dx = h^{-1} \left\{ \frac{1}{2} b \exp (-h b^2) + h^{-1/2} \left(\frac{1}{2} + h b^2 \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{1}{2} \pi^{1/2} - \int_0^z \exp (-z^2) dz \right] \right\}; \quad z^2 = h b^2;$$

$$\int_{-\infty}^0 x \exp [-h(x+b)^2] dx = -(2h)^{-1} \{ \exp (-h b^2) + 2 b h^{1/2} \cdot \\ \cdot \left[\frac{1}{2} \pi^{1/2} + \int_0^z \exp (-z^2) dz \right] \};$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp [-h(x-b)^2] dx = h^{-1} \left\{ \frac{1}{2} b \exp (-z^2) + h^{-1/2} \left(\frac{1}{2} + h b^2 \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{1}{2} \pi^{1/2} - \int_{-z}^0 \exp (-z^2) dz \right] \right\};$$

$$\int_0^{\infty} x \exp [-h(x-b)^2] dx = (2h)^{-1} \left\{ \exp (-z^2) + 2 b h^{1/2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{1}{2} \pi^{1/2} - \int_{-z}^0 \exp (-z^2) dz \right] \right\};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp (-h x^2) dx = 0;$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp (-p x^2) dx = (4p)^{-1} (\pi p^{-1})^{1/2}.$$

Appendix 1.

Proof of the perpendicularity of the resultant velocity.

Given: $\overline{AB} \parallel \overline{CDE}$, $\angle ABN = \angle NBF$, $\overline{DE} = \overline{EF}$, $\overline{NB} \perp \overline{EG}$.

Proof: $\angle ABF = \angle DEH = 2\theta$; $\therefore \angle DEF = 180^\circ - \angle DEH = 180^\circ - 2\theta$,

$\angle EDF + \angle EFD = 180^\circ - (180^\circ - \angle DEH) = 2\theta$.

But $\angle EDF = \angle EFD$. Since $\overline{ED} = \overline{EF}$ forms an isosceles triangle $\therefore \angle EDF = \angle EFD = \theta$.

Since $\overline{AB} = \overline{CE}$ and $\angle CDI = \angle ABN = \theta$, line $\overline{IDFG} \perp \overline{BG}$.

Appendix 2.

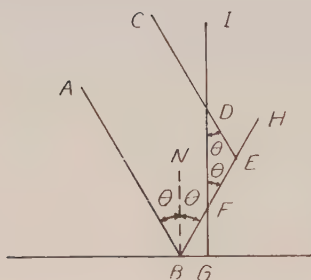
Proof of $N e^{-X_{01}/L} M \cos \theta$.

Let N be the molecular density in the volume AV for the case of the plate perpendicular to V . Then the density of the reflected molecules at a distance x_0 from the plate is given by HEINEMAN as $N e^{-X_{01}/L} M$.

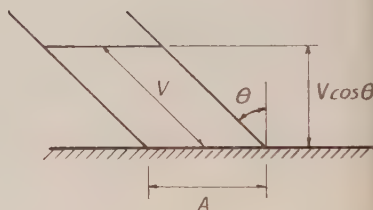
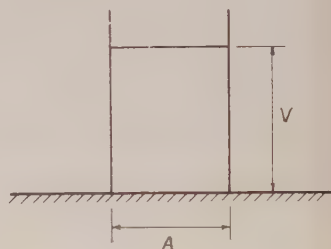
Now take the case of the incoming velocity inclined at an angle θ to the normal of the plate. Using the same area A on the plate, the volume, from solid geometry, is $AV \cos \theta$. The effective molecular density acting on the area A of the inclined plate is reduced by the ratio $AV \cos \theta / AV = \cos \theta$. Therefore, the molecular density of the reflected molecules at a distance X_{e1} from the plate is

$$N_e = X_{e1} / L M \cos \theta.$$

A = area on the plate. V = molecular velocity.



App. 1. Proof of Perpendicularity



App. 2. Reflection

Bibliography

- [1] H. ASHLEY, Applications of the theory of free molecule flow to Aeronautics. *J. Aer. Sci.* 16, 2, 95—104, Feb. 1949.
- [2] P. S. EPSTEIN, On the Resistance Experienced by Spheres in Their Motion Through Gases. *Physical Review*, 23, p. 710, 1924.
- [3] G. GRIMMINGER, E. P. WILLIAMS and G. B. W. YOUNG, Lift on Inclined Bodies of Revolution in Hypersonic Flow. *J. Aer. Sci.* 17, 11, 675—690, Nov. 1950.
- [4] M. HEINEMAN, Theory of Drag in Highly Rarefied Gases. *Comm. Appl. Math. NYU*, 1, 3, 259—273, Sept. 1948.
- [5] H. R. IVEY, B. E. KLUNKER and E. M. BOWEN, A method for determining the Aerodynamic Characteristics of Two and Three Dimensional Shapes at Hypersonic Speeds. *NACA, TN 1613*, July, 1948.
- [6] H. R. IVEY and R. R. MORRISSETTE, An Approximate Determination of the Lift of Slender Cylindrical Bodies and Wing Body Combinations at Very High Supersonic Speeds. *NACA, TN 1740*, Oct. 1948.
- [7] G. JAFFÉ, Zur Methodik der kinetischen Gastheorie, *Ann. Physik, Ser. A*, 6, 195—252, 1930.
- [8] E. D. KANE, Drag Forces on Spheres in Low Density Supersonic Gas Flow. *Univ. Calif. Rep. HE—150—65*, Febr. 15, 1950.
- [9] J. B. KELLER, On the Solution of the Boltzmann Equation for Rarefied Gases. *Comm. Appl. Math. NYU*, 1, 3, 275—285, Sept. 1948.
- [9a] E. H. KENNARD, *Kinetic Theory of Gases*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1938.

- [10] E. SÄNGER, 1. Gaskinetik sehr hoher Fluggeschwindigkeiten. Deutsche Luftfahrtforschung, Forschungsbericht Nr. 972, 1938; also: NACA, TM 1270, 1950.
2. Gaskinetik sehr großer Flughöhen. Schweiz. Arch. Angew. Techn. 16, 43—63, 1950.
- [11] E. SÄNGER, and I. BREDT, Über einen Raketenantrieb für Fernbomber. Deutsche Luftfahrtforschung, Untersuch. und Mitteil. 3538, 141—173, Berlin 1944.
- [12] J. R. STALDER and D. JUKOFF, Heat Transfer to Bodies Travelling at High Speed in the Upper Atmosphere. NACA, TN 1682, 1948 and NACA, Rep. 944, 1949.
- [13] J. R. STALDER, G. GOODWIN and M. O. CREAGER, A comparison of theory and experiment for high speed free molecule flow. NACA, TN 2244, 1950.
- [14] J. R. STALDER and V. J. ZURICK, Theoretical Aerodynamic Characteristics of Bodies in a Free Molecule Flow Field. NACA, TN 2423, July 1931.
- [14a] J. A. STRATTON, Electromagnetic Theory. McGraw-Hill Book Co., New York, 1938.
- [15] H. S. TSIEN, Superaerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases. J. Aer. Sci. 13, 12, 653—664, Dec. 1946.
- [16] A. F. ZAHM, Superaerodynamics. J. Franklin Inst. 217. 153—166, 1934.

Die Plasma-Kenngrößen einer Quecksilber-Niederdruck-Entladung mit mehreren Elektronengruppen

Von

W. Heribert Schneider

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz

Mit 14 Abbildungen

-(Eingelangt am 10. März 1955)

Zusammenfassung

Die vollständige Auswertung von Charakteristiken, die mit kleinen Plansonden in einer Quecksilber-Niederdruck-Entladung bei Anodenspannungen von 30 bis 150 Volt, Anodenströmen von 25 bis 350 mA und Quecksilber-Temperaturen von -20° bis $+34^{\circ}$ C erhalten wurden, ergab, daß in allen Teilen des Entladungsgefäßes außer der Gruppe der Primärelektronen zwei Elektronengruppen mit MAXWELLScher Geschwindigkeitsverteilung vorhanden sind. In den meisten Fällen war eine Korrespondenz der Verhältnisse im Anoden-Kathoden-Raum der zylindrischen Versuchsanordnung mit denen in den Außenbezirken der Entladung festzustellen. Die Abhängigkeit der Plasmakenngrößen von den Entladungsparametern wird diskutiert.

Einleitung

Schon in älteren Untersuchungen LANGMUIRS (1), (2) wurde darauf hingewiesen, daß in Glühkathoden-Niederdruck-Entladungen meist mehrere Elektronengruppen mit MAXWELLScher Geschwindigkeitsverteilung vorhanden sind, deren Trennung bei speziellen Versuchsbedingungen durch die Verwendung extrem großer Plansonden gelang. Vom Verfasser wurde neuerdings (5) gezeigt, daß durch eine kritische Aufnahme und Auswertung von Charakteristiken mit kleinen Plansonden und Zylindersonden die Trennung der Elektronengruppen immer gelingt.

Um den Verlauf der Plasmakenngrößen sowohl im Anoden-Kathodenraum als auch in den Randbezirken der Entladung in Abhängigkeit von Anodenspannung, Anodenstrom und Gasdruck festzustellen, wurden zahlreiche Sondencharakteristiken mit drei kleinen Plansonden aufgenommen. Da es sich nur um eine allgemeine Orientierung und Erprobung der neuen Auswertemethode handeln sollte, wurde trotz der etwas schwer zu übersehenden Feldverteilung eine zylindrische Elektrodenanordnung für die Entladung verwendet.

Es zeigte sich, daß die Sondencharakteristiken in allen Fällen völlig gedeutet werden können. Die von J. LANGMUIR mitgeteilten Ergebnisse

Bezüglich der schnellen Elektronengruppe wurden nur teilweise beschäftigt; möglicherweise sind die Unterschiede in den Ergebnissen auf den starken Stromentzug durch die von LANGMUIR verwendeten großen Kondensoren und die damit verbundene Störung der Entladung zurückzuführen.

Versuchsanordnung

Für die Untersuchungen wurde das schon in einer früheren Arbeit erwähnte Entladungsgefäß verwendet (Abb. 1). Der untere kugelförmige Teil mit dem Quecksilbervorrat war in einem Temperaturbad, um verschiedenen Druck im Entladungsgefäß einzustellen. In der Mitte des Gefäßes befand sich der an beiden Enden offene Anodenzylinder A aus Eisen und in dessen Achse der Wolfram-Glühdraht K (0,02 cm Durchmesser, 4,5 cm Länge). Anode und Kathode waren mittels angeschweißter Eisendrähte Z und Kupplungstücken an Einschmelzungen in Glasteller G befestigt. Die luftdichte Verbindung dieses Tellers mit dem Entladungsgefäß wurde durch einen Callitring C und zwei Bunaringe hergestellt. Als Dichtungsfett diente Apiezon.

Die Plansonden waren aus Nickel und hatten einen Durchmesser von 0,2 cm und eine Höhe von 0,03 cm. Sie waren folgendermaßen im Entladungsgefäß angebracht: die Sonde S_1 war mit der Auffangfläche parallel zur Längsachse des Gefäßes an einer Einschmelzung im unteren Teil befestigt; die mittlere Sonde S_2 war mit nach unten gerichteter Auffangfläche in halber Höhe des Anodenzylinders in der Mitte zwischen Anode und Kathode angebracht; die obere Sonde S_3 befand sich mit nach unten gerichteter Auffangfläche in der Längsachse des Gefäßes in der Höhe des Absaugstutzens. Der Abstand der Sonden 1 und 3 von Sonde 2 war annähernd gleich groß.

Es wurde die bei Sondenmessungen übliche Schaltung verwendet¹, die jedoch insofern erweitert wurde, als gleichzeitig mit zwei Sonden, die sich auf demselben Potential befanden, gemessen werden konnte, und zwar so, daß jede Sonde ihr eigenes Amperemeter und beide ein gemeinsames Voltmeter hatten. Bezugselektrode war bei allen Messungen die Anode. Als Anodenspannung diente eine Akkumulatorenbatterie von 150 Volt und für die Sondenspannung ein Gleichrichtergerät mit maximal 200 Volt. Der Heizstrom betrug bei neuen Glühdrähten 5,1 A.

Mit den Sondenmessungen wurde erst begonnen, nachdem das Entladungsgefäß ausgeheizt war. Die Sondencharakteristik, die von nega-

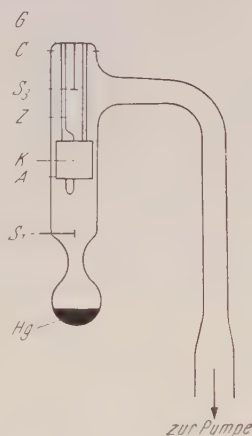


Abb. 1. Das Entladungsgefäß.
Maßstab 1 : 10

¹ R. SEELIGER, Physik der Gasentladungen, 1934.

tiven Spannungen beginnend punktweise aufgenommen wurde, wobei die am stärksten negative Spannung etwa 10 Minuten eingeschaltet blieb, wurde gleichzeitig mit zwei Sonden aufgenommen. Es wurde entweder mit Sonde 1 und 2 oder 2 und 3 zugleich gemessen; auf diese Art konnte festgestellt werden, ob bei den Messungen mit den Sonden 1 und 3 dieselben Entladungseigenschaften vorhanden waren. Dies ist im Hinblick auf den durchzuführenden Vergleich von Wichtigkeit.

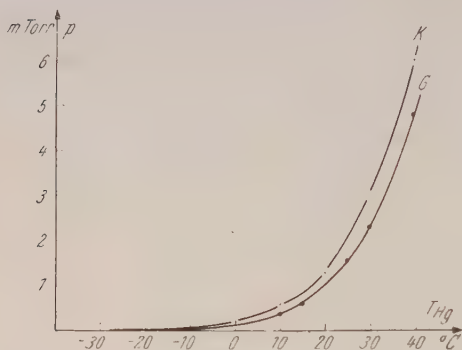


Abb. 2. Der Sättigungsdampfdruck des Quecksilbers

Die Angaben der Sättigungsdampfdrucke des Quecksilbers in Abhängigkeit von der Temperatur erfolgten auf Grund der Werte in der 18. Auflage des Lehrbuches von F. KOHLRAUSCH, Praktische Physik, vgl. Abb. 2 Kurve K; die Werte aus den Gasentladungstabellen von KNOLL, OLLENDORFF-ROMPE 1935, sind zum Vergleich als Kurve G eingezeichnet. Das Entladungsgefäß blieb während der Messungen an

der Diffusionspumpe; daher wird die Gasdichte in der Umgebung des Absaugstutzens durch die Kühlwassertemperatur der Diffusionspumpe mitbestimmt. Überdies wird die Gasdichte auch durch die Temperatur des Glühdrahtes beeinflusst und daher herrscht im Entladungsgefäß ein Dichtegefälle.

Allgemeine Bemerkungen über den Aufbau des Plasmas

Die Auswertung der Sondencharakteristiken für Anodenspannungen von 30 bis 150 Volt, für Anodenströme von 25 bis 350 mA und für Quecksilbertemperaturen von -20 bis $+34^{\circ}\text{C}$ zeigte, daß in allen Teilen des Entladungsgefäßes drei Arten von Elektronen vorhanden sind: die mehr oder weniger aus ihrer Richtung abgelenkten, aber nur sehr wenig gebremsten Primärelektronen und zwei Gruppen von Elektronen mit MAXWELL-Verteilung der Geschwindigkeiten mit verschiedener mittlerer Geschwindigkeit. Diese Gruppen sollen als schnelle und langsame Gruppe unterschieden werden.

Über das Zustandekommen dieser beiden Gruppen kann man sich folgendes vereinfachtes Bild machen: Die schnelle Gruppe — ihre Mitglieder sollen die ϵ_1 heißen, ihre mittlere Energie E_1 , ihre Dichte N_1 — entsteht aus den Glühelktronen, die durch mehrere Anregungs- und Ionisierungsstöße einen großen Teil ihrer Energie eingebüßt haben. Bei den Ionisierungsstößen der Glühelktronen werden aus den Quecksilberatomen langsame Elektronen befreit, aus denen sich ein großer Teil der langsamen Gruppe aufbaut. Ein Teil der Elektronen dieser

Gruppe entsteht aber sicher auch durch Umwandlung der schnellen Elektronen ε_1 infolge von unelastischen (anregenden) Stößen in langsame, ferner dadurch, daß angeregte Atome teils durch Stoß mit den freien Elektronen und teils durch den Photoeffekt ionisiert werden. Die Mitglieder der langsamen Gruppe sollen die ε_2 heißen, ihre Energie E_2 , ihre Dichte N_2 .

Die Abhängigkeit der Plasmakenngrößen von den Entladungsparametern an verschiedenen Stellen des Entladungsgefäßes.

Die erhaltenen Sondencharakteristiken, die unter möglichster Vermeidung von Störungen aufgenommen wurden, konnten nach dem kürzlich mitgeteilten Verfahren (5) völlig ausgewertet werden. Da die Stromaufnahme der Sonden sehr klein war, wurde durch sie keine wesentliche Beeinflussung des Plasmas hervorgerufen und man kann daher die Meßergebnisse als recht verläßlich bezeichnen. Um einen bequemen Vergleich der drei untersuchten Entladungsteile zu ermöglichen, wurden die Kurven über die Abhängigkeit je einer der gemessenen Plasmakenngrößen (Plasmapotential U_p , Energien E_1 und E_2 , Dichten N_1 und N_2) von den Entladungsparametern, Anodenspannung U_a , Anodenstrom I_a , Druck p , für die drei verschiedenen Sonden zusammengestellt.

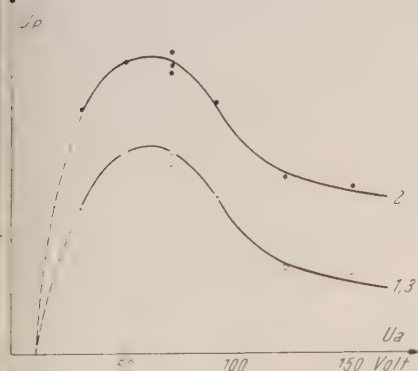


Abb. 3. $I_a = 200$ mA, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

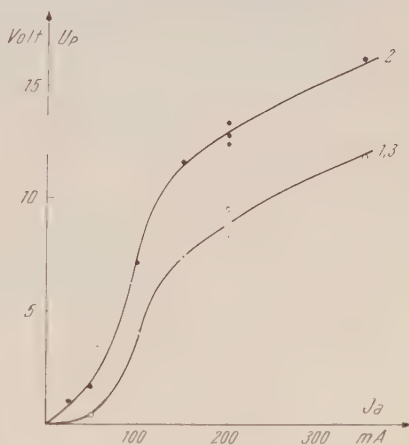


Abb. 4. $U_a = 70$ V, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

In den Abbildungen 3 bis 5 sind die Abhängigkeiten des Plasmapotentials U_p von U_a , I_a und p dargestellt; die Werte für die äußeren Sonden S_1 und S_3 ergeben die mit 1, 3 bezeichneten Kurven, die Kurven 2 gelten für die mittlere Sonde S_2 . Man erkennt, daß sich die Sonden S_1 und S_3 trotz des im Entladungsraum vorhandenen Dichtegefälles an Stellen gleichen Potentials befinden, das um etwa 4 Volt kleiner ist als bei Sonde 2 im Anoden-Kathodenraum. Man kann daraus und aus dem Resultat, daß sich U_p auch bei einseitiger Änderung des Dichtegefälles — hervorgerufen durch die verschieden starke Erhitzung des

Glühdrahtes und durch Änderung der Temperatur des Quecksilber-vorrates — in allen Teilen gleichmäßig ändert, schließen, daß die Potentialverteilung nur von den geometrischen Verhältnissen abhängt. Da sich die Gefäßwände auf das ziemlich stark negative Potential eines isolierten Körpers aufladen, war eine Abnahme des U_p in den Außenbezirken zu erwarten. Aus der Gleichheit der U_p -Werte bei den äußeren Sonden ist zu erkennen, daß die Orientierung der Sondenauffangflächen belanglos ist.

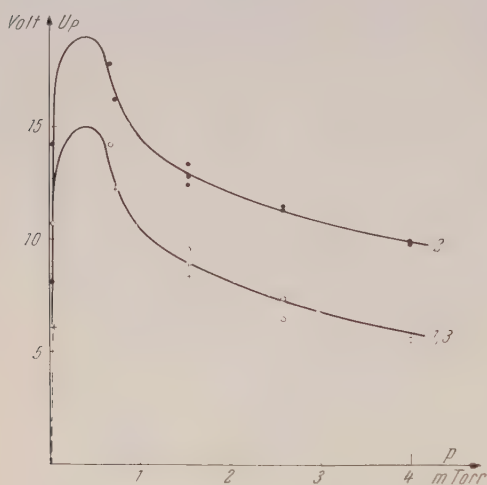


Abb. 5. $U_a = 70$ V, $I_a = 200$ mA, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ\text{C}$

Es sind offenbar verschiedene Plasmen bei schwachen und starken Entladungsströmen vorhanden; denn erst von ungefähr 100 mA an ergibt sich der oben erwähnte Unterschied von 4 Volt. Ferner kann man aus dem Verlauf der Kurven erkennen, daß das Plasmapotential für hohe Werte von U_a , I_a und p vermutlich Grenzwerten zustrebt.

Das steile Umbiegen der Kurven in Abbildung 5 bei 0,4 mTorr legt die Vermutung nahe, daß sich erst bei diesem Druck ein zur Bildung des

Plasmas besonders günstiger Stoßmechanismus ausbildet, der jedoch nur durch eine gewisse Erhöhung der Beschleunigungsspannung, die durch $U_a + U_p$ bestimmt wird, ausgenutzt werden kann. Auch dem Maximum von U_p in Abb. 3 bei der Anodenspannung von etwa 60 Volt wird man eine ähnliche Ursache zuschreiben können: Bei diesem U_a wird die verstärkte Ionisierung, die sich in einer starken Zunahme der Leuchtintensität des Plasmas äußert, zusätzlich durch die Erhöhung der Energie der Primärelektronen infolge der Zunahme von U_p bewirkt. In beiden Fällen entspricht diesem Maximum, wie die Messungen ergaben, jeweils auch eines der Dichte der ε_1 und ε_2 ; das scheint die geäußerte Vermutung zu bestätigen.

Eine Übersicht über die Meßresultate für die mittlere Energie E_1 der schnellen Elektronen in Abhängigkeit von U_a , I_a und p geben die Abb. 6 bis 8. Es ist zu erkennen, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem Entladungszentrum (Kurve 2) und seinen Randbezirken (Kurve 1 und 3) besteht; denn der Kurvenverlauf ist im großen und ganzen bei allen Sonden gleichartig. Der in Abb. 6 auftretende Sprung in Kurve 2 dürfte auf Störungen zurückzuführen sein, die im Laufe der Messungen nur im Anoden-Kathodenraum auftraten. Da sich in den Kurven 1

und 3 kein Sprung zeigt, kann man folgern, daß die ε_1 nicht durch Diffusion aus dem Zentrum der Entladung in die Randbezirke gelangen, sondern dort entstehen,

d. h. aber, daß die Primärelektronen dorthin gestreut werden (durch elastische und unelastische Stöße) und durch ihre Ionisierungsstöße die ε_1 dort erzeugen.

Diese Annahme erklärt auch, warum E_1 in den Randbezirken kleiner ist als im Zentrum: Die Primärelektronen kommen in den Randbezirken mit geringerer Energie an und daher haben auch die durch sie erzeugten ε_1 eine kleinere Energie.

Abb. 7 läßt erkennen, daß E_1 in den Randbezirken unabhängig vom Anodenstrom I_a ist, während im Zentrum eine gleichmäßige Zunahme von E_1 mit I_a beobachtet wurde; diese Tatsache hat ihren Grund in der zunehmenden Erhitzung des Glühdrahtes, wodurch die Gasdichte im Anodenzyliner trotz gleichbleibender Quecksilbertemperatur

aufwend sinkt; hiedurch wird die freie Weglänge der ε_1 vergrößert und die Möglichkeit der Energieabgabe durch unelastische Stöße herabgesetzt. Es ist besonders bemerkenswert, daß die bei der Anodenspannung von 80 Volt, dem Maximum der Ionisierungsfunktion des Quecksilbers,

auftretende größte Leuchtintensität der Entladung nicht an einem Minimum von E_1 (vgl. die Kurven von Abb. 6) sichtbar wird.

Diese Ergebnisse sind nicht in Übereinstimmung mit denen von LANGMUIR, der E_1 annähernd proportional der Energie der Primär-

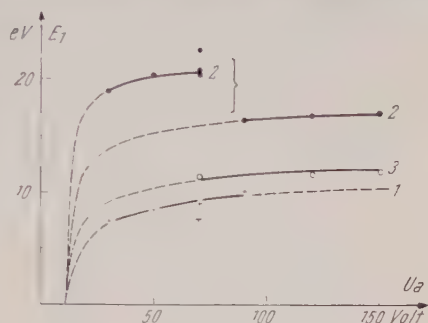


Abb. 6. $I_a = 200$ mA, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

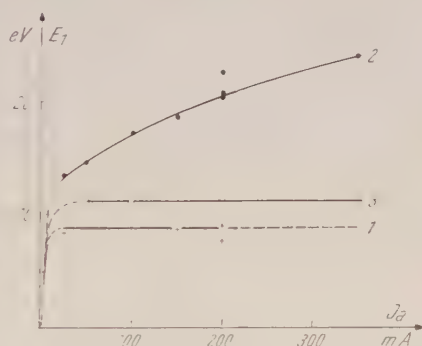


Abb. 7. $U_a = 70$ V, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

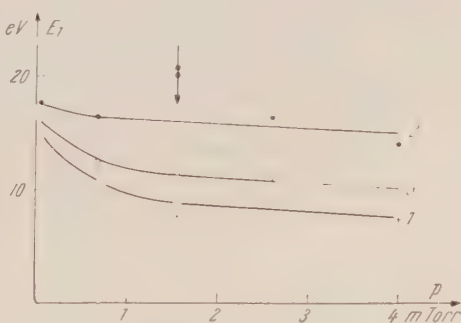


Abb. 8. $U_a = 70$ V, $I_a = 200$ mA, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

elektronen und unabhängig vom Gasdruck fand; doch wird wohl, wie schon in der Einleitung vermutet, bei LANGMUIR der Aufbau des Plasmas durch den starken Stromentzug seiner großen Sonde gestört. Der Vergleich mit der Arbeit von BOYD (4) ergibt eine gewisse Übereinstimmung.

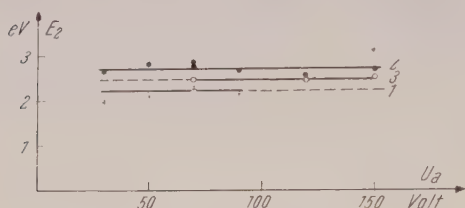


Abb. 9. $I_a = 200 \text{ mA}$, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 22^\circ \text{C}$

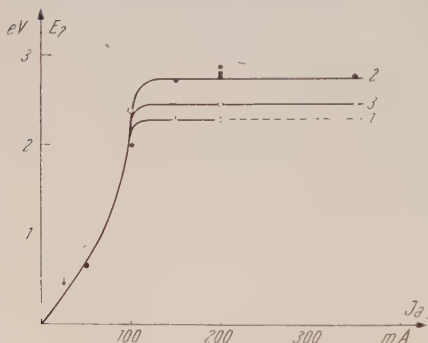


Abb. 10. $U_a = 70 \text{ V}$, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

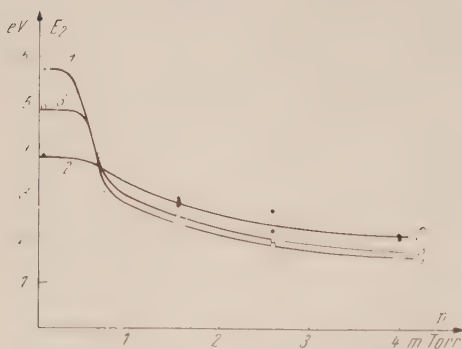


Abb. 11. $U_a = 70 \text{ V}$, $I_a = 200 \text{ mA}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

strömen unterhalb 100 mA die E_2 -Werte im ganzen Entladungsgefäß wesentlich kleiner als bei höheren Anodenströmen sind. Es läßt sich folgern, daß zwei verschiedene Plasmen, die ihre Entstehung verschiedenen Stoßmechanismen verdanken, oberhalb und unterhalb 100 mA vorhanden sind. Es ist nicht leicht, dafür eine sichere

BOYD weist nur auf die Anwesenheit der schnellen Elektronengruppe hin und bestimmt E_1 nicht. Doch läßt es sich aus seinen „E-Kurven“ grob abschätzen. Ein direkter Vergleich mit den Messungen von SMITH und Mitarbeitern (3) ist wegen der völlig anderen Entladungsbedingungen nicht möglich. Es ist jedoch interessant, bei diesen Autoren betont zu finden, daß die schnelle Gruppe der Elektronen nur unterhalb eines gewissen Gasdruckes nachzuweisen ist; dieser wurde jedoch in den eigenen Untersuchungen bei weitem nicht erreicht.

Die Meßresultate betreffen die Energie E_2 der langsamen Elektronen sind in den Abb. 9 bis 11 wiedergegeben. Es zeigte sich ebenfalls ein analoger Verlauf zwischen Anoden-Kathodenraum und den Randbezirken. Nur bei kleinen Drucken ist die Energie E_2 im Entladungszentrum niedriger als in den Randbezirken, sonst ist es umgekehrt. Bemerkenswert ist die Tatsache (vgl. Abb. 10), daß bei niedrigen Anoden-

Erklärung zu geben. Die Energie der ε_2 , die ja zum größten Teil durch eine Art Sekundäremission der Quecksilberatome entstehen, sollte eigentlich nur von der Gasdichte abhängen — daher sind die E_2 -Werte für die einzelnen Sonden bei verschiedenen Drucken (vgl. Abb. 11, die für den Anodenstrom 200 mA gilt) im allgemeinen auch etwas verschieden und es ist bezeichnend, daß bei 0,7 m Torr, wo die Temperatur des Quecksilbervorrates und des Kühlwassers der Diffusionspumpe gleich hoch sind, das Dichtegefälle im Entladungsgefäß also den kleinsten Wert hat, die Kurven sich überschneiden. Die ε_2 büßen durch Anregungsgröße Energie ein und nur wenn im Plasma bei genügend hoher Trägerdichte starke Mikrofelder vorhanden sind, können diese Energieverluste wieder durch Beschleunigung in den Mikrofeldern kompensiert werden. Das könnte die Ursache dafür sein, daß bei kleinen Trägerdichten unterhalb 100 mA ein stark vermindertes E_2 gemessen wird. Aus den Meßergebnissen betreffend die Dichten N_1 und N_2 der schnellen und langsamen Elektronen sollen die Tabellen 1 bis 3 herausgegriffen werden.

Tabelle 1. Elektronendichten bei verschiedenen Anodenströmen.

 $U_a = 70$ Volt, $t_{\text{Hg}} = 22$ °C. Mittlere Sonde.

i_a in mA	N_1 in $10^9/\text{cm}^3$	N_2 in $10^9/\text{cm}^3$	N_2/N_1
25	0,032	6,5	203
50	0,065	9,0	138
100	0,188	13,5	72
150	0,36	20,1	56
200	0,51	27	51
350	0,79	63	80

Tabelle 2. Elektronendichten bei verschiedenen Drucken.

 $U_a = 70$ Volt, $I_a = 200$ mA. Mittlere Sonde.

t_{Hg} in °C	p in mTorr	N_1 in $10^9/\text{cm}^3$	N_2 in $10^9/\text{cm}^3$	N_2/N_1
34	4,0	0,65	76	118
28	2,6	0,66	51	77,5
22	1,55	(0,68)	(34)	(50)
12,5	0,7	0,69	18	26
— 16,5	0,05	0,43	3,4	8

Tabelle 1 zeigt, daß beide Dichten bei konstanter Anodenspannung U_a und konstantem Druck p mit zunehmendem Anodenstrom I_a wachsen. Tabelle 2 zeigt den Einfluß des Druckes: Die Dichte N_1 der ε_1 wird durch Druckänderungen nur wenig geändert, während die Dichte N_2

der ε_2 dem Druck proportional steigt. Aus Tabelle 3 läßt sich erkennen, daß N_1 im Zentrum der Entladung nur etwa doppelt so groß als in den Randbezirken ist, daß aber N_2 im Zentrum etwa den 10-fachen Wert hat.

Tabelle 3. Elektronendichten an verschiedenen Stellen der Entladung.

$I_a = 200 \text{ mA}$, $U_a = 70 \text{ Volt}$, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$

	N_1 in $10^9/\text{cm}^3$	N_2 in $10^9/\text{cm}^3$	N_2/N_1
Zentrum	0,53	27	51
Oberer Rand	0,20	2,1	10,6
Unterer Rand	0,28	3,3	12

Um diese Ergebnisse zu verstehen, muß man in Betracht ziehen, daß im Gleichgewichtszustand Erzeugung und Vernichtung der verschiedenen Elektronensorten sich das Gleichgewicht halten müssen.

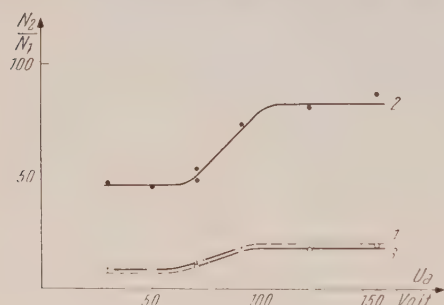


Abb. 12. $I_a = 200 \text{ mA}$, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

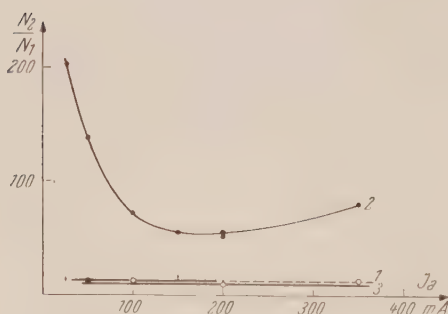


Abb. 13. $U_a = 70 \text{ V}$, $t_{\text{Hg}} = 22^\circ \text{C}$, $t_{\text{H}_2\text{O}} = 12^\circ \text{C}$

Die Erzeugung der ε_1 ist dem Glühelctronenstrom der gleich I_a ist, und in erster Näherung auch dem Druck proportional, denn die Zahl der unelastischen Stöße der Primärelektronen nimmt mit dem Druck zu. Für die Vernichtung der ε_1 dürfte ihre Umwandlung in ε_2 durch unelastische (anregende) Stöße, deren Zahl ebenfalls dem Druck proportional angenommen werden kann, von ausschlaggebender Bedeutung sein. Die Abwanderung an die Wände scheint damit verglichen nur eine geringe Rolle zu spielen. Daher muß N_1 annähernd unabhängig vom Druck sein und mit I_a wachsen, wie es die Beobachtungen auch wirklich zeigen. Die Erzeugung der ε_2 ist ebenfalls dem I_a und dem Druck

proportional, denn sowohl die Zahl der ε_2 , die zugleich mit den ε_1 entstehen, als auch die Zahl derjenigen ε_2 , die durch Umwandlung der ε_1 infolge von unelastischen Stößen und durch den Photoeffekt gebildet

werden, ist dem Druck proportional anzunehmen. Die Vernichtung der ϵ_2 muß proportional ihrer Dichte N_2 und unabhängig vom Druck sein, wenn nur dann ergibt sich die Dichte N_2 als proportional zu I_a und p , wie beobachtet. Als Ursache einer Vernichtung der ϵ_2 mit den angegebenen Gesetzmäßigkeiten scheint nur der Vorgang der Diffusion in Betracht zu kommen. Es ist dann auch verständlich, daß N_2 im Zentrum viel größer als in den Randbezirken ist, weil in diesen das für die Diffusion maßgebliche Gefälle der Dichte N_2 sicher bedeutend größer ist.

Die Messungen ergaben ferner, daß die Dichten N_1 und N_2 bis zu $U_a = 60$ Volt gleichmäßig zu- und dann wieder verschieden stark — und zwar N_2 schwächer als N_1 — abnehmen, um bei größeren U_a -Werten Grenzwerten zuzustreben. Das bei $U_a = 80$ Volt liegende Maximum der Ionisierungsfunktion macht sich in einem Maximum des Primärelektronenstroms bemerkbar und die hierbei auftretende stärkste Leuchterscheinung ist nicht mit Extremwerten von N_1 und N_2 verbunden. Der für das maximale Leuchten in Betracht zu ziehende Stoßmechanismus verursacht also im wesentlichen zahlreiche Anregungsvorgänge sichtbarer Bogenlinien ohne

besonders starke Ionisierung des Quecksilberdampfes. Vielleicht kann man daraus schließen, daß auch Stöße zweiter Art eine wesentliche Rolle spielen. Eine gute Übersicht über den Dichteverlauf in Abhängigkeit von I_a und p gewinnt man, wenn man das Verhältnis N_2/N_1 bildet und dessen Änderung untersucht. Vgl. die Abb. 12 und 14. Der enge Zusammenhang zwischen dem Anoden-Kathodenraum und den Randbezirken ist wieder deutlich zu erkennen, wenn man nur den Verlauf der Kurven beachtet (eine Ausnahme bilden die Meßresultate für Sonde in Abb. 13), doch ist die Größenordnung der N_2/N_1 -Werte im Entladungszentrum etwa fünfmal größer

als in den Randbezirken. Die dargelegten vereinfachten Vorstellungen über die Erzeugung und Vernichtung der ϵ_1 und ϵ_2 geben dafür eine gute Erklärung.

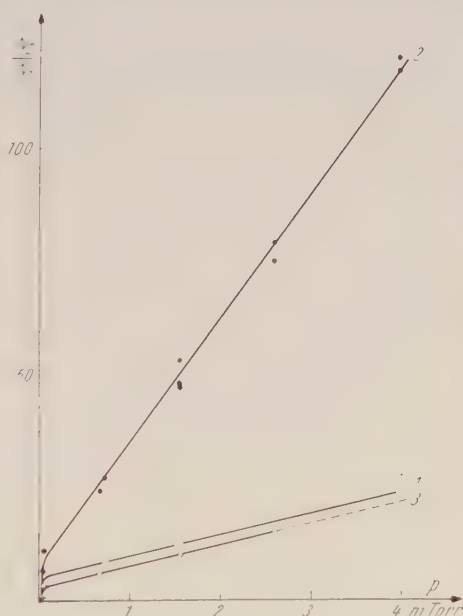


Abb. 14. $U_a = 70$ V, $I_a = 200$ mA, $t_{H_2O} = 12^\circ$ C

N_2/N_1 hängt bei der mittleren Sonde von der Stärke des Anodenstromes ab; bei etwa 175 mA hat dieses Verhältnis ein Minimum; die Zunahme zu beiden Seiten dieses Minimums ist im wesentlichen auf eine Vergrößerung von N_2 zurückzuführen.

N_2/N_1 steigt wie Abb. 14 erkennen läßt, mit wachsendem Gasdruck linear an, im Anoden-Kathodenraum wesentlich stärker als in den Randbezirken. Damit in Übereinstimmung ist es, daß die Intensität der Leuchterscheinung mit wachsendem Druck merklich zunimmt. Die Steigung der N_2/N_1 -Geraden der Abb. 14 dürfte vom Zentrum zu den Randbezirken gleichmäßig abnehmen und außer durch rein geometrische Bedingungen auch wesentlich durch die Art des Füllgases beeinflusst werden.

Um Sondenmessungen mit theoretischen Ergebnissen, die mit Rücksicht auf die verwickelten Vorgänge nur für übersichtliche Entladungsbedingungen — ebene und parallele Anode und Kathode — vorliegen, vergleichen zu können, wäre es zweckmäßig, Messungen in einem abgeschlossenen nicht zu kleinen Entladungsrohr mit der angegebenen Elektrodenanordnung vorzunehmen.

Schlußbemerkung

Aus den Ergebnissen der vollständigen Auswertung von Charakteristiken mit kleinen Plansonden, die in verschiedenen Entladungsteilen zu gleicher Zeit aufgenommen wurden, seien folgende noch einmal hervorgehoben:

Der Aufbau des Plasmas unterhalb und oberhalb 100 mA geht in etwas verschiedener Weise vor sich, was vielleicht auf den Einfluß der verschiedenen starken Mikrofelder zurückzuführen ist.

Plasmaschwankungen im Anoden-Kathodenraum sind ohne Einfluß auf die Entladungskenngrößen in den Randbezirken; daraus wurde geschlossen, daß die Ionisierung in den Randbezirken im wesentlichen durch gestreute Primärelektronen erfolgt und daß eine Diffusion der das Plasma im Zentrum bildenden Ladungsträger in die Randbezirke von untergeordneter Bedeutung ist.

Das Dichtegefälle im Entladungsgefäß, das sowohl durch die verschiedenen Temperaturen des Quecksilbervorrates und des Kühlwassers der Pumpe als auch durch die starke Erhitzung des Glühdrahtes entsteht, hat einen ungünstigen Einfluß auf die ungestörte Ausbildung des Plasmas.

Unabhängig von der Orientierung der Auffangflächen der Plansonden werden dieselben Kenngrößen der schnellen und langsamen Elektronengruppe gemessen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Frau Prof. Dr. A. SZÉKELY durchgeführt. Auch an dieser Stelle wiederhole ich gerne meinen ergebensten Dank an Frau Prof. Dr. A. SZÉKELY und an Herrn Prof. Dr. A. SMEKAL, den Vorstand des Physikalischen Instituts der Universität Graz, der die Hilfsmittel des Institutes zur Verfügung stellte.

Literatur

1. J. LANGMUIR, Phys. Rev. 26, 585, 1925.
 2. J. LANGMUIR und H. A. JONES, Phys. Rev. 31, 357, 1928.
 3. T. SMITH, J. F. TAIT, R. WHIDDINGTON, Proc. Leeds Phil. and Lit. Soc. Scientific Sec. V, 207, 1949.
 4. R. L. F. BOYD, Proc. Roy. Soc. A 201, 329, 1950.
 5. W. H. SCHNEIDER, Acta Physica Austr. 9, 107, 1955.
- Betreffend die Literatur vor 1945 wird auf die Zitate in (5) verwiesen.

Winkelkorrelationen

Von

O. Hittmair

School of Physics, University of Sydney, Australien

Mit 3 Abbildungen

(Eingelangt am 31. März 1955)

Unter möglichst einfacher Zusammenfassung des theoretischen und experimentellen Gesichtspunkts wird eine Übersicht über das Gebiet der Winkelkorrelationen von Kernstrahlungen gegeben. In Teil I wird der ungestörte Fall der Korrelation von zwei aufeinanderfolgenden radioaktiven Strahlungen für alle in Frage kommenden Arten besprochen. Teil II behandelt den Fall der durch äußere magnetische oder elektrische Felder gestörten Korrelation. Dabei zeigt sich, daß eine scharfe Trennung zwischen statischer und zeitabhängiger Störung nötig ist. In Teil III wird die Beziehung zu Kernreaktionen dargelegt. jj - und LS -Koppelungen kommen dabei im Korrelationsformalismus klar zum Ausdruck.

Einleitung

Die Winkelkorrelationen selbst sind vom Standpunkt des Theoretikers eine erledigte Angelegenheit. Wenn man einmal dabei angelangt ist, die Korrelationsfunktion in RACAH-Koeffizienten und Kugelfunktionen auszudrücken, hat der mathematische Apparat für das grundsätzlich als Phänomen den höchsten Grad der Vereinfachung erreicht, und es bleibt in Bezug auf Prägnanz des Ausdrucks kein Wunsch mehr offen. Indessen eröffnet sich im Anwendungsgebiet der Winkelkorrelationen sowohl in theoretischer wie in experimenteller Hinsicht ein ungemein reichhaltiges Feld.

Der reine Fall ist ausschließlich auf die geometrischen Eigenschaften der Kerne und ihrer Strahlungen gegründet, also auf Spins und Multipolmomente. Er ist ganz unabhängig von der besonderen Struktur des Kerns und der Intensität der Strahlungen, und das Versuchsergebnis läßt sich exakt, ohne empirischen Parameter voraussagen, ein Fall, der in der Kernphysik immerhin bemerkenswert ist.

Andererseits erstreckt sich die besondere Erscheinungsform der Winkelkorrelationen auf Strahlungsarten, die keine gesonderte Betrachtung energieunabhängiger geometrischer Eigenschaften zulassen auf Multipolmischungen sowie auf den Einfluß äußerer Felder auf die Korrelation. Dies kann nicht nur Aufschlüsse über die unmittelbare

Eigenschaften der Kerne und ihrer Strahlungen geben, die weiter gehen als beim reinen Fall, sondern es eröffnen sich auch vielversprechende Einblicke in die Natur des festen und flüssigen Zustandes.

Neben einer Reihe von speziellen Abhandlungen über das Gebiet der Winkelkorrelationen befaßt sich der Übersichtsartikel von BIEDENHARN und ROSE [1] mit der theoretischen Seite, während sich die Abhandlung RAUENFELDERS [2] mehr den experimentellen Ergebnissen und Arbeitsmethoden zuwendet. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, unter möglichst einfacher Zusammenfassung beider Gesichtspunkte auch dem Leser einen Einblick in das Gebiet zu gewähren, der an und für sich der Materie ferner steht, und sein Interesse zu wecken.

I. Ungestörte Winkelkorrelationen

1. Der allgemeine Zusammenhang

Wenn wir von Winkelkorrelationen sprechen, so meinen wir damit vor allem die Korrelation zwischen den Richtungen zweier aufeinanderfolgender radioaktiver Strahlungen ein und desselben Kerns. Es ist daher nicht verwunderlich, daß eine derartige Korrelation vorliegt: ist doch der Zustand des Kernes vor der zweiten Ausstrahlung wesentlich durch die erste Strahlung bedingt und dient somit als Bindeglied zwischen beiden Emissionen. Die gerichtete Größe des Zwischenzustandes, zu der die Strahlungsrichtungen in Beziehung treten und durch die sie voneinander abhängen, ist sein Spin. Die Wahrscheinlichkeit der Emission eines γ -Quants oder einer Partikel in eine bestimmte Richtung hängt von dem Winkel ab, den diese Richtung mit der Spinachse des emittierenden Kerns bildet.

Unter gewöhnlichen Umständen, das heißt ohne äußeres Feld im Raum, folgt aus der gleichmäßigen statistischen Verteilung der Spins über alle Richtungen in der radioaktiven Quelle die völlige Isotropie der emittierten Strahlung. Es ist a priori keine Richtung im Raum ausgezeichnet. Wir können diese isotrope Lage der Kernspins jedoch abändern, indem wir etwa durch ein äußeres Magnetfeld die Kerne in eine bevorzugte Lage ausrichten. Die nun entsandte Strahlung wird eine von dieser Richtung abhängige Emissionswahrscheinlichkeit zeigen.

Statt diese bevorzugte Lage der Spinachsen durch ein äußeres Feld zu erzielen, kann man auch so vorgehen, daß man jene Kerne heraushebt, die gerade in eine vorgegebene Richtung emittiert haben. Durch diese Winkelabhängigkeit der Emissionswahrscheinlichkeit haben ja nun diese Spinachsen ihrerseits eine bestimmte nichtisotrope Verteilung in bezug auf die vorgegebene Richtung. Erfolgt nun die zweite Ausstrahlung aus dieser nichtisotropen Verteilung, so ist es klar, daß auch sie im allgemeinen kein isotropes Bild zeigen wird, sondern daß ihre Emissionswahrscheinlichkeit eine Korrelation zur vorgegebenen Richtung zeigen wird. Die Korrelation ist also eine Funktion des Winkels, den die Strahlungen miteinander einschließen.

2. Das fundamentale Experiment

Ein Anfangskern A emittiert ein Lichtquant oder ein Teilchen und geht in den Mittelkern B über. Von dort erfolgt unter nochmaliger Ausstrahlung der Übergang in den Endkern C . Die erste Strahlung wird

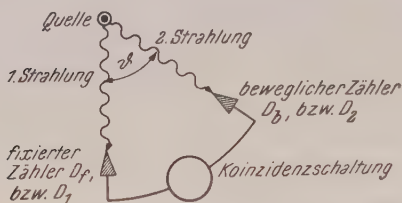


Abb. 1. Fundamentale Versuchsanordnung zur Messung einer Richtungskorrelation

gemessen, wenn sie einen fixierten Zähler D_f trifft, die zweite wird von einem dazu drehbaren Zähler D_b registriert. Um die aufeinanderfolgenden Strahlungen ein und desselben Kerns zu messen, stehen die beiden Zähler in Koinzidenzschaltung (Abb. 1). Die relative Zahl der Koinzidenzen pro Zeiteinheit für verschiedene Winkel zwischen den Strahlungen gibt die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit $W(\vartheta)$ diesen Winkel an, die Korrelationsfunktion der Richtungen.

Voraussetzung dafür, daß diese Koinzidenzzahl pro Zeiteinheit die wahre Korrelationsfunktion darstellt, ist, daß es sich um eine zentrierte radioaktive Quelle handelt, daß die Zähler die Richtungen scharf auswählen, und daß keine Streuung von Strahlung in die Zähler vorliegt. Um dies zu erreichen, umgibt man die Zähler mit einem Bleimantel, der die Form eines Kegels hat, und nur Strahlungen von der zentrierten Punktquelle zuläßt. Einen noch besseren Schutz gegen Streustrahlung bildet die Verwendung von Szintillationsspektrometern, durch die man die unerwünschten Strahlen absondern kann.

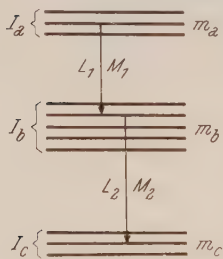


Abb. 2. Schema der Spins und m -Niveaus in einer Korrelation

Die Zahl der wahren Koinzidenzen erhält man, wenn man den Hintergrund und die Zahl der zufälligen Koinzidenzen pro Zeiteinheit $2 \tau_K N_f(\vartheta) N_b(\vartheta)$, abzieht, wo τ_K die Koinzidenzauflösungszeit und N_f und N_b die Einzelmessungen des fixierten und beweglichen Zählers beim Winkel ϑ bedeuten. Prinzipiell sollen diese Größen natürlich von ϑ unabhängig sein. Das Ergebnis durch N_b dividiert, ist unabhängig von den Besonderheiten der verwendeten Quelle.

HAMILTON [3] leistete 1940 die Pionierarbeit in der Theorie der Winkelkorrelationen. In den folgenden Jahren wurden mehrfach Versuche unternommen, seine Ergebnisse experimentell zu bestätigen, aber ohne Erfolg. GOERTZEL [4] untersuchte 1946 den Einfluß störender äußerer Felder auf die Winkelkorrelation. Ein derartiger Einfluß hätte in der Tat manche der negativen experimentellen Ergebnisse rechtfertigen können. Aber im Jahre 1947 führten BRADY und DEUTSCH [5] die erste erfolgreiche Messung durch und eröffneten damit den Reigen in einem der heutzutage populärsten Gebiete der Kernspektroskopie.

sonders die Einführung der Szintillationszähler [6] in das Winkelkorrelationsexperiment beschleunigte die Entwicklung.

3. Die Elemente der Theorie

Je nach ihrem Spin I haben die Niveaus des Anfangs-, Mittel- und Endkerns $2I + 1$ Unterniveaus, die nur der Deutlichkeit halber in Abb. 2 getrennt gezeichnet sind. Die Niveaus sind in Wirklichkeit entartet. Für die Spins I , die Multipolmomente L der Strahlungen und die magnetischen Quantenzahlen gelten die Beziehungen:

$$\vec{I}_a = \vec{I}_b + \vec{L}_1, \quad \vec{I}_b = \vec{I}_c + \vec{L}_2 \quad (1a)$$

$$m_a = m_b + M_1, \quad m_b = m_c + M_2 \quad (1b)$$

Jede Strahlungskomponente M besitzt eine für sie charakteristische Richtungsverteilung $F_L^M(\vartheta)$. Für eine γ -Kaskade z. B. kann man sie klassisch als die Richtungsverteilung des Poyntingvektors für den betreffenden Submultipol, charakterisiert durch L und M , bestimmen. Für eine Dipolstrahlung ($L = 1$) erhält man:

$$F_1^0(\vartheta) = 3 \sin^2 \vartheta = 2 - 2 P_2(\cos \vartheta), \quad (2)$$

$$F_1^{\pm 1}(\vartheta) = \frac{3}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) = 2 + P_2(\cos \vartheta)$$

Die Summe der Komponenten muß natürlich winkelnunabhängig sein, wenn mit gleichen Gewichten summiert wurde. Das entspricht isotroper Emission der emittierenden Kerne. Legt man nun aber eine bestimmte Richtung durch den fixierten Zähler D_1 fest und wählt sie als z -Achse, werden durch die ausgewählten M_1 -Werte der ersten Strahlung (bei γ -Strahlung $M_1 = \pm 1$) die m_b -Werte ungleiche Gewichte aufweisen, die emittierenden Kerne der zweiten Strahlung nicht mehr isotrop liegen. Dadurch erhalten die $F_{L_2}^{M_2}$ -Komponenten verschiedene statische Gewichte und geben durch ihre anisotrope Richtungsverteilung in Bezug auf die z -Achse die gesuchte Richtungskorrelation $W(\vartheta)$.

Für eine γ -Kaskade zweier Dipole, die zwischen den Kernniveaus mit $I_a = 0, I_b = 1, I_c = 0$ erfolgt, beschränkt sich m_b wegen $M_1 = \pm 1$ nach (1b) auf die Werte ± 1 . Die Richtungsverteilung der zweiten Strahlung in Bezug auf die erste kann also nur die Komponenten $F_1^{\pm 1}(\vartheta)$ enthalten. Da diese mit gleicher relativer Übergangswahrscheinlichkeit folgen, ergibt sich $W(\vartheta) \sim 1 + \frac{1}{2} P_2(\cos \vartheta)$.

Ganz allgemein wird die relative Übergangswahrscheinlichkeit für verschiedene magnetische Quantenzahlen durch das Quadrat des entsprechenden CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten, also $(I_b L_1 I_a; m_b M_1 m_a)^2$ für die erste Strahlung und $(I_c L_2 I_b; m_c M_2 m_b)^2$ für die zweite Strahlung, gegeben. Eine verhältnismäßig einfache Formel für diese Koeffizienten gibt RACAH [7].

Die relative Bevölkerung der m_b -Niveaus ist also durch $(I_b L_1 I_a; M_1 m_a)^2$ und die relative Intensität der $F_{L_1}^{M_1}$ -Komponenten in der

z -Richtung gegeben. Nach Summierung über die isotropen Anfangslagen m_a erhält man

$$P_{m_b} = \sum_{m_a} (I_b L_1 I_a; m_b \mu_1 m_a)^2 F_{L_1}^{\mu_1}, \quad (3)$$

wo wir mit μ die M -Zahlen der Strahlung in z -Richtung bezeichnen haben. Das Argument 0 in $F_L^\mu(0)$ wird dann überflüssig.

Ganz analog setzt sich die relative Intensität der zweiten Strahlung in Richtung ϑ aus den Faktoren $(I_c L_2 I_b; m_b M_2 m_b)^2$ und $F_{L_2}^{M_2}(\vartheta)$ zusammen, aber bei der Summation über die m_b treten nun die P_{m_b} als statistische Gewichte auf. Da durch Emission der zweiten Strahlung die Kernspinachsen wieder in isotrope Lage übergehen, ist über die m_c mit gleichen Gewichten zu summieren. So bekommt man schließlich

$$W(\vartheta) = \sum_{m_b m_c} P_{m_b} (I_c L_2 I_b; m_c M_2 m_b)^2 F_{L_2}^{M_2}(\vartheta) \quad (4)$$

Einsetzen von (3) in (4) ergibt die gesuchte Korrelationsfunktion $W(\vartheta)$. Bei den hier betrachteten reinen Multipolstrahlungen (nur ein L -Wert für einen Übergang) spielen die absoluten, kernabhängigen Intensitäten, die durch die Quadrate der reduzierten, das heißt m -unabhängigen Matrixelemente $(I_b || L_1 || I_a)$ und $(I_c || L_2 || I_b)$ bestimmt werden, nur die Rolle von Proportionalitätsfaktoren.

Der nächste Schritt ist nun, die physikalische Äquivalenz beider Strahlungen auch mathematisch besser herauszustellen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir $F_L^M(\vartheta)$ in Kugelfunktionen:

$$F_L^M(\vartheta) = \sum_{\nu} K_{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta) \quad (5)$$

Der Koeffizient K_{ν} ergibt sich aus den allgemeinen Rotationseigenschaften einer Submultipolstrahlung $F_L^M(\vartheta)$ als

$$K_{\nu} = \sum_{\mu} (-1)^{M-\mu} (L L \nu; \mu - \mu 0) (L L \nu; M - M 0) F_L^{\mu}. \quad (6)$$

Die besondere Art der Strahlung (α -, β -, γ -Strahlung) drückt dabei in wohlbestimmter Weise in den Strahlungsparametern F_L^{μ} aus.

Setzt man dies alles in (4) ein, so ergibt sich, daß alle Summen, die rein geometrischen Charakter haben, das heißt in denen kein für die Strahlungsart charakteristischer Parameter auftritt, ausgeführt werden können. Sie lassen sich in Form m -unabhängiger RACAH-Koeffizienten schreiben, und das Ergebnis lautet schließlich:

$$W(\vartheta) = \sum_{\nu} c_{\nu L_1} W(L_1 I_b L_1 I_b; I_a \nu) c_{\nu L_2} W(L_2 I_b L_2 I_b; I_c \nu) P_{\nu}(\cos \vartheta) \quad (7)$$

it

$$c_{\nu L} = \sum_{\mu} (-1)^{L-\mu} (L L \nu; \mu -\mu 0) F_L^{\mu} \quad (8)$$

Die W -Koeffizienten sind die RACAH-Koeffizienten. Tafeln sind für die wichtigeren Fälle vorhanden [8].

Aus den Eigenschaften der RACAH-Koeffizienten folgt für ν die Beschränkung

$$\nu \leq \text{Min.} \{2 L_1, 2 L_2, 2 I_b\}, \quad (9)$$

die Beziehung, die YANG [9] aus der Invarianz der Korrelation bei Rotation und Inversion abgeleitet hatte.

4. γ γ -Korrelationen

a) Die ungestörte Richtungskorrelation

Für die Richtungskorrelation einer aus reinen Multipolen bestehenden Kaskade vereinfachen sich die Koeffizienten $c_{\nu L}$, da $F_L^1(0) = F_L^{-1}(0)$. Die Summe über μ wird hinfällig und man hat

$$c_{\nu L} \sim (L L \nu; 1 -1 0),$$

so daß man mit den Tafeln für die CLEBSCH-GORDAN- und die RACAH-Koeffizienten sofort die Korrelationsfunktion $W(\vartheta)$ in Kugelfunktionen angeben kann:

$$W(\vartheta) = \sum_{\nu} A_{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta), \quad (10)$$

$$A_{\nu} = (L_1 L_1 \nu; 1 -1 0) (L_2 L_2 \nu; 1 -1 0) \\ W(L_1 I_b L_1 I_b; I_a \nu) W(L_2 I_b L_2 I_b; I_c \nu)$$

Experimentell bestimmt man die Koeffizienten A_{ν} , indem man ein geeignetes ν_{\max} annimmt (im allgemeinen 4) und mit der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung den Ausdruck (10) der experimentell gemessenen Kurve anpaßt.

Höhere ν als 4 sind nicht gemessen worden. Multipole mit $L > 2$ haben nämlich mittlere Lebensdauern $> 10^{-6}$ sec. Es ist fast unmöglich, eine Winkelkorrelation mit einem derart langlebigen Mittelkern zu messen. Störungen durch die Elektronenhülle und die Umgebung lassen den Kern in dieser Zeit seine Ausrichtung vergessen und zerstören die Korrelation.

In vielen Kaskaden folgen nicht nur zwei, sondern mehrere Strahlungen aufeinander. Der Formalismus der Doppelkaskade kann ohne besondere Schwierigkeit auf Tripelkaskaden ausgedehnt werden [10]. Wenn man die Beobachtung wieder auf einen einzigen Winkel ϑ beschränkt. Das kann geschehen, indem man die mittlere Strahlung unbeobachtet läßt und die $\gamma_1 \gamma_3$ -Korrelation mißt oder indem man zwei Zähler für zwei Strahlungen auf einer Geraden fixiert und mit dem dritten beweglichen die dritte Strahlung in verschiedenen Winkeln ϑ zu dieser Geraden mißt.

Die Richtungskorrelation der $\gamma\gamma$ -Kaskade von Ni^{60} war die erste erfolgreich angegriffene [5]. Die gemessene Funktion $W(\vartheta)$ läßt schließen, daß sie zwischen den Spins 4, 2, und 0 durch zweimalige Quadrupolstrahlung erfolgt. Dies wurde mehrfach bestätigt und Ni^{60} ist zu einer Standardkaskade geworden. Sie ist ungestört, da die mittlere Lebensdauer des Mittelkerns $< 10^{-11}$ sec ist.

b) *Polarisations-Richtungs-Korrelationen*

Die $\gamma\gamma$ -Richtungskorrelation ist aber unempfindlich für die Paritäten der betreffenden Kernniveaus. Das hat seinen Grund darin, daß der Poyntingvektor für elektrische Strahlung der gleiche ist wie für magnetische Strahlung, obwohl die beiden entgegengesetzte Parität aufweisen. In der Richtungsverteilung ist also kein Unterschied. Es gibt jedoch ein Mittel, um zwischen elektrischer und magnetischer Strahlung zu unterscheiden: man mißt die Richtungsverteilung des elektrischen Vektors der γ -Strahlung, also ihre Polarisation.

Das Experiment für eine Polarisationsmessung der ersten Strahlung besteht darin, daß man die Intensität der im Zähler D_1 senkrecht Compton-gestreuten γ -Strahlung mißt. Die Intensität der Streustrahlung hängt vom Winkel φ ab, den diese mit der Ebene der Zähler D_1 und D_2 einschließt. Sie ist polarisationsabhängig. Natürlich muß der Zähler D_1 selbst ein rotationssymmetrischer Streukörper für die erste Strahlung sein.

Wir stehen also hier wie bei den Richtungskorrelationen vor dem Fall, daß eine an und für sich isotrope Verteilung — ein an und für sich unpolarisierter Strahl in unserem Falle — durch Fixierung einer Bezugsbasis mittels der anderen Strahlung der Kaskade ein anisotropes Verhalten zeigt. Die Bezugsbasis bei der Polarisationskorrelation ist für den Winkel φ die Zählerebene. $W(\vartheta, \varphi)$ zeigt verschiedene Abhängigkeit für magnetische oder elektrische erste Strahlung, indem die Parität der Strahlung als Parameter in die Korrelationsfunktion eingeht. Die der elektrischen ist $(-1)^L$, die der magnetischen $(-1)^{L-1}$.

Eine erfolgreiche Messung wurde von METZGER und DEUTSCH an Ti^{46} durchgeführt [11] und ergab eine Kaskade zweier elektrischer Quadrupole. Alle drei Niveaus A, B, C haben also gleiche Parität.

c) *Gemischte Richtungskorrelationen*

Es kann vorkommen, daß eine oder beide Strahlungen der Kaskade nicht als reine, sondern als gemischte Multipolstrahlung erfolgen. So ist z. B. zwischen denselben Niveaus im allgemeinen sowohl elektrische Quadrupol- wie magnetische Dipolstrahlung möglich. Die reduzierten Matrixelemente (§ 3) von L und L' können jetzt nicht mehr fortgekürzt werden und ihr Verhältnis $\delta \equiv (I_b || L' || I_a) / (I_b || L || I_a)$ tritt als neuer Parameter in der Korrelationsfunktion auf. Die reduzierten Matrixelemente und ihr Verhältnis δ können immer reell gewählt werden, wie LLOYD [12] zeigte. Das folgt aus der Invarianz bei Zeitumkehr der Wechselwirkungshamiltonfunktionen der Strahlungsvorgänge.

W(ϑ) ergibt sich bei gemischter erster Strahlung als [1]

$$W(\vartheta) = (2L_1 + 1)^2 w_I + (L_1' + 1)^2 \delta^2 w_{II} + 2\delta[(2L_1 + 1)(2L_1' + 1)]w_{III}$$

w_I und w_{II} sind gegeben durch (10) mit L bzw. L' als erster Strahlung.

$$w_{III} = \sum_{\nu} (L_1 L_1' \nu; 1 - 1 0) (L_2 L_2 \nu; 1 - 1 0) \cdot$$

$$\cdot W(L_1 I_b L_1' I_b; I_a \nu) W(L_2 I_b L_2 I_b; I_c \nu) \times P_{\nu}(\cos \vartheta)$$

Proportionalitätsfaktoren wurden fallen gelassen.

In Cd^{111} läßt das Korrelationsexperiment darauf schließen [13], daß der Übergang $7/2 \rightarrow 5/2$ eine Mischung von elektrischem Quadrupol mit magnetischem Dipol ist mit $\delta = +0.145 \pm 0.015$.

5. Richtungskorrelationen von Konversionselektronen

In schweren Elementen ist die γ -Strahlung oft stark in Ausstrahlung von Elektronen aus der Hülle des Kerns konvertiert, ($\alpha > 1$). Es ist in diesen Fällen vorteilhaft, die Richtungskorrelation der Elektronenstrahlungen oder diejenige einer Elektronenstrahlung mit einer γ -Strahlung zu messen. Die elektromagnetische Wechselwirkung der Füllenelektronen der verschiedenen Schalen mit dem Kern bringt es mit sich, daß sich Strahlungsübergänge des Kerns in Übergängen der Elektronen vom gebundenen in den freien Zustand äußern können. Natürlich ist dann die Richtungsverteilung der Elektronenstrahlungskomponenten charakteristisch für den Multipolübergang des Kerns. Sie hängt aber auch für Elektronen derselben Schale nicht nur von der Multipolordnung des konvertierten Übergangs ab, sondern auch von seiner Energie und Parität und von der Kernladung. So kann die Konversionskorrelation mehr Auskünfte geben als die $\gamma\gamma$ -Richtungskorrelation und sie auf jeden Fall vorteilhaft ergänzen.

ROSE, BIEDENHARN und ARFEN [14] behandeln die Richtungskorrelation für Konversionselektronen aus der K -Schale in relativistischer Weise. Das Ergebnis läßt sich ausdrücken durch Multiplikation jedes Koeffizienten A_{ν} der ungestörten Korrelation (10) mit einem Parameter $b_{\nu}(e^{-})$ für die konvertierte Strahlung. Sind beide Strahlungen einer γ -Kaskade konvertiert, so sind die A_{ν} mit dem Produkt $b_{\nu}(e_1^{-}) b_{\nu}(e_2^{-})$ zu multiplizieren. Tabellen der b_{ν} sind in [1] zu finden.

Die experimentelle Hauptschwierigkeit besteht darin, die Streuung der Elektronen in der Luft zwischen Quelle und Detektor zu vermeiden. Das kann entweder durch ein Vakuum oder durch Ersetzen der Luft durch Wasserstoff geschehen. Als Detektor kann ein β -Spektrometer oder eine Nebelkammer dienen.

In Pb^{207} und Cd^{111} wurden Spin- und Paritätsdaten durch die Konversionskorrelation bestätigt [15]. In Te^{121} und Te^{123} wurden durch die Konversionskorrelation neue Daten erhalten [16].

6. $\beta\gamma$ -Richtungskorrelationen

Beim β -Zerfall ist die Situation wesentlich komplizierter als bei dem bisher betrachteten elektromagnetischen Übergängen. Neben dem beobachteten Elektron wird auch noch das unbeobachtete Neutrino emittiert. Es ist daher über die Richtungen der Neutrinoemission zu integrieren. Die Korrelation wird auch davon abhängen, an welcher Stelle E des Energiespektrums man das Elektron mißt. Dies ergibt dann die sogenannte differentielle Korrelationsfunktion $W(\vartheta, E)$ zum Unterschied von der integralen $W(\vartheta)$, bei der über das ganze Energiespektrum integriert wird. Die Experimente erstreckten sich bis jetzt nur auf die differentielle Korrelation.

Bei elektromagnetischen Übergängen ist außerdem Wechselwirkung und Koppelungskonstante wohl bekannt, nicht so beim β -Übergang. Hier kommen die fünf relativistisch invarianten Arten der Wechselwirkung in Frage und auch ihre Kombinationen. Außerdem entspricht bei elektromagnetischer Strahlung einer bestimmten Parität und Multipolordnung L ein ganz bestimmtes Matrixelement, das für den betreffenden Kernübergang maßgebend ist. Beim β -Zerfall hingegen gehören zu einer Ordnung L des Übergangs oft mehrere Matrixelemente in ein und demselben Wechselwirkungsschema. Es sind also drei verschiedene Arten von Interferenzen möglich: Interferenzen verschiedener Wechselwirkungsarten, Interferenzen verschiedener Matrixelemente derselben Wechselwirkung und gleicher Ordnung L , und schließlich noch solche verschiedener möglicher L -Werte. Dies bringt natürlich eine gewisse Unsicherheit in die Korrelation in Form von verschiedener-angelegbaren Parametern. Andererseits können aber gerade diese dazu dienen, neue Erkenntnisse über den β -Zerfall zu gewinnen.

Eine gewisse Kontrolle für die Wahl der Parameter bildet die Form des Energiespektrums der β -Teilchen. Das Spektrum des sogenannten „erlaubten“ Übergangs wird durch den Energiekorrekturfaktor $C(E)$ auf seine beobachtete Form gebracht. Die in der Korrelationsfunktion verwendeten Parameter müssen nun auch den richtigen Korrekturfaktor $C(E)$ ergeben.

FALKOFF und UHLENBECK [17] entwickelten als erste eine Theorie der $\beta\gamma$ -Korrelation. Ihre Ergebnisse finden sich in verallgemeinerter Form in [1].

Die grundlegenden Überlegungen für die Richtungskorrelation in § 3 gelten natürlich auch für die $\beta\gamma$ -Korrelation, da aber im allgemeinen mehrere reduzierte Matrixelemente und verschiedene L -Werte für den Übergang $A \rightarrow B$ auftreten, kompliziert sich die Formel, da die Matrixelemente wegen der verschiedenen Interferenzen nicht mehr als Faktoren weggelassen werden können.

Die experimentelle Technik ist derjenigen der Konversionskorrelation sehr ähnlich. Der β -Zerfall $\text{Tm}^{170} \rightarrow \text{Yb}^{170}$ mit folgender γ -Strahlung ergibt sich als [18, 19] $1^{-\alpha} \rightarrow 2^{+\beta} \rightarrow 0$ -Übergang mit Mischung von Matrixelementen aus der S- und T-Wechselwirkung.

7. $\alpha\gamma$ -Richtungskorrelationen

Da das α -Teilchen ein spinloses Teilchen ist, vereinfachen sich die Koeffizienten (8) zu

$$c_{\nu L} \sim (L L \nu; 0 0 0)$$

und (7) nimmt eine besonders einfache Form an. Es können jedoch energiemäßig Interferenzen verschiedener L -Werte auftreten, wenn die Auswahlregeln für den Übergang $A \rightarrow B$ dies zulassen.

Bei der Emission von α -Teilchen erleidet der Kern einen beträchtlichen Rückstoß. Dies bringt es mit sich, daß er vor der γ -Emission mit beträchtlichen elektrischen Feldgradienten des Kristallfeldes in Wechselwirkung tritt, in dem er eingebettet ist. Daher zeigen fast alle γ -Korrelationen Störungen.

Eine Ionisationskammer kann sehr wirkungsvoll zur Messung von $\alpha\gamma$ -Korrelationen verwendet werden [20] (Abb. 3). Der Impuls, der in der Ionisationskammer durch das α -Teilchen ausgelöst und in den Vielkanalanalysator weitergeleitet wird, ist eine Funktion des Winkels ϑ , unter dem das α -Teilchen in Bezug auf die fixierte γ -Strahlrichtung mittiert wird. Der Vielkanalanalysator gestattet es, viele Punkte der Korrelationskurve

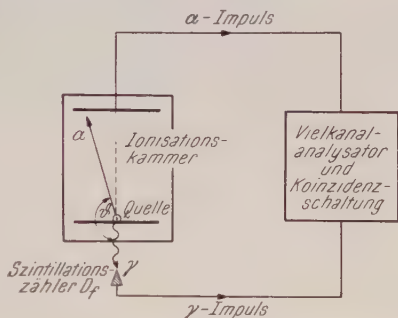


Abb. 3. Verwendung der Ionisationskammer in $\alpha\gamma$ -Korrelationen

auf einmal zu messen. Für ein bestimmtes ϑ steht dem α -Strahl nun außerdem der ganze Raumwinkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ zur Verfügung. Das erhöht natürlich die absolute Zahl der $\alpha\gamma$ -Koinzidenzen.

Das erste vollkommen geglückte Korrelationsexperiment einer $\alpha\gamma$ -Kaskade gelang für den Übergang $\text{Po}^{210} \xrightarrow{\alpha} \text{Pb}^{206}$, der in den ersten angeregten Zustand von Pb^{206} führt [21]. Man erhält die Daten: $0 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 0$.

II. Gestörte Richtungskorrelationen

1. Allgemeines

Wir haben bisher angenommen, daß der Mittelkern B keiner äußeren Störung unterworfen ist, bevor der Übergang in den Zustand C erfolgt. Dies ist immer erfüllt, wenn die mittlere Lebensdauer von B $\tau_B < 10^{-11}$ sec. Störende Felder haben dann sozusagen keine Zeit, in den Korrelationsprozess einzugreifen. Bei größerem τ_B ist es möglich, daß äußere magnetische oder elektrische Felder eine Präzession der Kernspinachse von B hervorrufen und dadurch Übergänge in den m_b -Zuständen verursachen. Diese Änderung der Bevölkerung P_{m_b} bringt eine geänderte Korrelationsfunktion $W(\vartheta)$ mit sich und zerstört in manchen Fällen die Korrelation vollständig. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn das störende Feld

selbst zeitlichen Änderungen unterworfen ist, da bei statischem Feld die Korrelation jener Kaskaden ungestört bleibt, bei denen eine der Strahlungen in Richtung des Störfeldes erfolgt. Dies nennt man den „harten Kern“ der Korrelation.

Experimentell kann man den Einfluß des Störfeldes untersuchen, indem man in der Koinzidenz eine Verspätungszeit einschaltet. Dadurch wird an und für sich nur die Intensität, nicht aber die Winkelabhängigkeit der Korrelation geändert. In dieser Verspätungszeit hat nun aber das Störfeld Gelegenheit zu wirken.

Die Abhängigkeit einer $\gamma\gamma$ -Kaskade von den äußeren Feldern ihrer Umgebung wurde zuerst am Cd^{111} gezeigt [22, 23].

2. Statische Störfelder

a) Magnetisches Störfeld

Die Larmorfrequenz ω_L des Kernes B mit dem magnetischen Moment μ ist gegeben durch

$$\omega_L = \mu H / I_b \hbar = g \mu_n H / \hbar,$$

wenn μ_n das Kernmagneton bedeutet.

Steht das störende Magnetfeld senkrecht zur Ebene der Zähler D_1 und D_2 , so wird nun statt einer Korrelation $W(\vartheta)$ die Korrelation $W(\vartheta - \omega_L t)$, gemessen, wo t die Zeit bedeutet, die zwischen den beiden Strahlungen vergeht. Wenn die Koinzidenzauflösungszeit τ_R lang ist gegenüber der mittleren Lebensdauer τ_B von B , so ergibt sich bei $\nu = 2$ nach Integration über t

$$W(\vartheta, H) = \frac{B_2}{\sqrt{1 + (2 \omega_L \tau_B)^2}} \cos(\vartheta - \Delta \vartheta),$$

$$B_2 = \frac{3 A_2}{4 + A_2}, \quad \Delta \vartheta = \frac{1}{2} \tan^{-1} 2 \omega_L \tau_B.$$

Es kann also ω_L und damit der g -Faktor sowohl der Größe wie auch dem Vorzeichen nach bestimmt werden. Die Korrelationsfunktion zeigt eine Verflachung und eine Drehung des Diagramms für den ungestörten Fall. Die Drehung kann nur dann beobachtet werden, wenn mindestens einer der Zähler selektiv nur auf eine der Kaskadenstrahlungen anspricht. Der g -Faktor des ersten erregten Zustandes von Cd^{111} wurde in Zürich [24] gemessen und ergab $-(0,28 \pm 0,05)$.

b) Elektrisches Störfeld

Ein elektrischer Feldgradient kann mit dem elektrischen Quadrupolmoment von B in Wechselwirkung treten. Auch die Quadrupolkopplung $e Q / \hbar \cdot \partial^2 V / \partial z^2$ erzeugt eine Präzession der Kernachse von B . Sie ist jedoch in beiden Richtungen gleich wahrscheinlich, und es erfolgt daher keine Drehung des Korrelationsdiagramms. Das Vorzeichen des Quadrupolmoments kann also nicht durch das Korrelationsexperiment bestimmt werden. Auch seine Größe bleibt ungewiß, da im allgemeinen

Der Feldgradient $\partial^2 B / \partial z^2$ des störenden Kristallfeldes nur sehr ungenau bekannt ist.

Die $\gamma\gamma$ -Kaskade von Cd^{111} wurde in einem Indiumkristall untersucht [25]. Gemessen wurde die Anisotropie $A \equiv \frac{W(180^\circ) - W(90^\circ)}{W(90^\circ)}$ in Abhängigkeit vom Winkel, den die Kristallachse mit der Richtung von \mathbf{I}_1 einschloß. Das Ergebnis war

$$\frac{eQ}{h} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 6,86 \pm 0,4 \text{ Mc/sec.}$$

Zwei $\alpha\gamma$ -Kaskaden des Th^{230} wurden im selben Kristallfeld gemessen [20], und die beiden ermittelten Werte $\omega \tau_B$ und $(\omega \tau_B)'$ ins Verhältnis gesetzt. Dieses Verhältnis kann man als unabhängig vom elektrischen Feldgradienten annehmen und man erhält bei bekannten mittleren Lebensdauern τ_B und τ_B' das Verhältnis der Quadrupolmomente der beiden Mittelkerne Ra^{226} . Es ergab sich ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Aussagen des Kernmodells von BOHR und MOTTELSON [26].

3. Zeitabhängige Störfelder

Hier denkt man in erster Linie an die Beeinflussung einer flüssigen radioaktiven Quelle durch die mit der lokalen Konfiguration der Flüssigkeit schwankenden elektrischen Feldgradienten. Wenn man die Korrelationszeit τ_C als diejenige Zeit definiert, innerhalb der sich diese Konfiguration erheblich ändert, so ergeben sich folgende Fälle [27]:

Für sehr kleine τ_C ($< 10^{-11}$ sec) bleibt die Korrelation ungestört. Das Feld ändert sich zu schnell, um auf B eine resultierende Wirkung zu erzielen.

Mit steigendem τ_C wird die Korrelation verflacht und kann schließlich ganz verschwinden.

Bei $\tau_C \sim \tau_B$ fängt die Anisotropie wieder zu steigen an, bis sie für $\tau_C \gg \tau_B$ dem Werte in einem Kristallpulver entspricht.

Die Zähigkeit einer Flüssigkeit ist ungefähr ihrer Korrelationszeit τ_C proportional. Die Untersuchung der $\gamma\gamma$ -Kaskade von Cd^{111} in Abhängigkeit von der Zähigkeit der flüssigen Quelle (InCl_3 in wässriger Lösung) gab das erwartete Verhalten [28].

III. Winkelkorrelationen und Kernreaktionen

1. $j j$ -Koppelung

Der statistische Formalismus der geometrischen Größen einer Winkelkorrelation läßt sich ohne weiteres auf die Winkelverteilung einer Kernreaktion

$$a + X = Y + b$$

übertragen. Der Anfangskern X mit dem Spin I_1 absorbiert das einfallende Teilchen a mit dem Spin i_1 und dem Bahndrehimpuls l_1 , worauf ein Teilchen $b(i_2, l_2)$ emittiert wird, und ein Endkern $Y(I_2)$ zurück-

bleibt. Der Zwischenkern der Reaktion nach der Absorption von a und vor der Emission von b entspricht dem Mittelkern B der Winkelkorrelation. Sein Spin sei mit J bezeichnet.

Wir nehmen nun an, daß es sich bei a um ein Teilchen mit scharferm Gesamtdrehimpuls j_1 (entspricht L_1 in § 3) handelt, daß nur ein Niveau J des Zwischenkerns erregt wird, und daß b ein γ -Quant reiner Multipolstrahlung L_2 darstellt. Wir erlauben dann gemäß (3) und (4)

$$W(\vartheta) = \sum_{m_1 m_2 \mu_1} (I_1 j_1 J; m_1 \mu_1 m_1 + \mu_1)^2 (l_1 i_1 j_1; 0 \mu_1 \mu_1)^2 \times \\ (I_2 L_2 J; m_2 M_2 m_1 + \mu_1)^2 F_{L_2}^{M_2}(\vartheta).$$

Die Größe $F_{L_2}^{M_2}$ in (3) ergibt sich also in diesem „reinsten“ Fall der Partikelstrahlung als $(l_1 i_1 j_1; 0 \mu_1 \mu_1)^2$. Das drückt aus, daß wir Spin und Bahndrehimpuls der Partikel a zu ihrem Gesamtdrehimpuls j_1 zusammengefaßt haben, also j - j -Koppelung angenommen haben. Das Ergebnis läßt sich wieder in den РАКАН- bzw. in den Z -Koeffizienten ausdrücken. Letztere haben die Definition [29]

$$Z(a b c d; e f) \equiv [(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{1/2} W(a b c d; e f) \times \\ \times (a c f; 0 0 0) \text{ bzw. } \times (a c f; -1 1 0) \text{ für } Z\gamma.$$

(Den Phasenfaktor i^{f-a+c} hat man aus Gründen der Zeitumkehr fortzulassen).

Man erhält

$W(\vartheta) = Z(l_1 j_1 l_1 j_1; i_1 \nu) W(j_1 J j_1 J; I_1 \nu) Z_\gamma(L_2 J L_2 J; I_2 \nu) P_\nu(\cos \vartheta)$ für den angenommenen Fall. Er ist etwa in der Reaktion $C^{13}(p, \gamma)N$ mit der Resonanz 1.76 MeV. verwirklicht [30]:

$$l_1 = 2, j_1 = \frac{5}{2}, I_1 = \frac{1}{2}^-, J = 2^-, I_2 = 1^-, L_2 = 2.$$

Die Winkelverteilung ist

$$W(\vartheta) = 1 - 0,5 \cos^2 \vartheta.$$

2. LS -Koppelung

Wenn für einen Fall wie oben durch das Schema der j - j -Koppelung von Spin und Bahndrehimpuls der absorbierten Partikel die richtige Winkelverteilung $W(\vartheta)$ der Reaktion wiedergegeben wird, ist man geneigt anzunehmen, daß für den Zwischenkern das j - j -Koppelungsschalenmodell zutreffend ist. Andererseits gilt dasselbe natürlich auch für LS -Koppelung, und das entsprechende Schema lautet für eine Reaktion der oben betrachteten Art, wenn

$$\vec{S}_x + \vec{L}_x = \vec{I}_1 \quad \text{und} \quad \vec{L} + \vec{S} = \vec{J},$$

$$W(\vartheta) = \sum_{m_x m_1 m_2} \langle L_x S_x I_1; m_x \mu_x m_1 \rangle^2 \langle l_1 L_x L; 0 m_x m_x \rangle^2 \langle i_1 S_x S; \mu_1 \mu_x \mu_1 + \mu_x \rangle^2 \times \\ \cdot \langle L S J; m_x \mu_1 + \mu_x m_x + \mu_1 + \mu_x \rangle^2 \langle I_2 L_2 J; m_2 M_2; m_2 M_2 m_x + \\ + \mu_1 + \mu_x \rangle^2 F_{L_2}^{M_2}(\vartheta).$$

Die CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten beschreiben der Reihe nach die Zerlegung von I_1 in L_x und S_x , die beiden parallellaufenden Zusammensetzungen der Bahndrehimpulse und Spins zu L bzw. S , die Vereinigung von L und S zu J und schließlich die γ -Strahlung.

Eine Reaktion, deren Winkelverteilung durch das LS -Schema festgelegt wird, ist $T(p, \gamma) \text{ He}^4$ mit einer breiten He-Resonanz [30]. Die dazu nötigen Annahmen sind ein $^2S_{1/2}$ Zustand positiver Parität für den Grundzustand von T und ein 1P_1 -Zustand negativer Parität für das erregte He-Niveau mit einfallenden p -Wellen-Protonen und ausgehender elektrischer Dipolstrahlung. Die Winkelverteilung ist

$$W(\vartheta) = 1 - \cos^2 \vartheta.$$

Dies läßt das LS -Koppelungsschalenmodell für He zutreffend erscheinen. Im allgemeinen ergibt sich, daß für leichte Kerne diese Kopplung bevorzugt ist [30].

3. Kanalspins

Oft liegt weder eindeutige $j j$ - noch LS -Koppelung vor. Es ist dann günstig, \vec{L}_1 und \vec{i}_1 formal zum Kanalspin \vec{s}_1 zusammenzufassen, und entsprechend \vec{s}_2 aus \vec{L}_2 und \vec{i}_2 zu bilden. Über die verschiedenen möglichen s summiert man dann mit entsprechenden Gewichten, um den physikalischen Gegebenheiten Rechnung zu tragen.

Weiters sind in der einfallenden wie in der ausgehenden Strahlung meistens mehrere Bahndrehimpulse l zugleich vorhanden, und wir wissen, daß die Komponenten dieser Mischungen mit den reduzierten Matrixelementen zu wägen sind. Als neue Komplikation tritt jedoch der Umstand hinzu, daß auch verschiedene Niveaus des Zwischenkerns gleichzeitig angeregt werden, wenn sie nahe genug beisammen liegen (verglichen mit dem Spektralbereich der einfallenden Strahlung im Kontinuumbereich, also auch bei monochromatischer Strahlung).

Die physikalischen Parameter, die diese verschiedenen Mischungen mit Gewichten versehen, lassen sich sehr einfach im S -Matrixformalismus ausdrücken: wenn J und J' zwei verschiedene Niveaus des Zwischenkerns bedeuten (auch wenn sie zufällig im Wert von J selbst übereinstimmen), so ist für den Übergang $s_1 \xrightarrow{l_1} J \xrightarrow{l_2} s_2$ das Matrixelement $S_{s_1 l_1; s_2 l_2}^J$ maßgebend und entsprechend für die Größen J', l_1', l_2' .

Die Winkelverteilung der Reaktion wird nun in voller Allgemeinheit [29]

$$W(\vartheta) = \sum_{s_1 J \nu} S_{s_1 l_1; s_2 l_2}^J S_{s_1 l_1'; s_2 l_2'}^{J'} Z(l_1 J l_1' J'; s_1 \nu) \times \\ \times Z(l_2 J l_2' J'; s_2 \nu) P_\nu(\cos \vartheta).$$

Das Ergebnis läßt sich formal ohne weiteres auf elastische Streuung ausdehnen.

Der Autor möchte DR. BLATT seinen Dank für wertvolle Bemerkungen aussprechen.

Literatur

1. L. C. BIEDENHARN und M. E. ROSE, *Rev. Mod. Phys.* **25**, 729 (1953).
2. H. FRAUENFELDER, vor Veröffentlichung in K. SIEGBAHNS Buch „Beta and Gamma Ray Spectroscopy“.
3. D. R. HAMILTON, *Phys. Rev.* **58**, 122 (1940).
4. G. GOERTZEL, *Phys. Rev.* **70**, 897 (1946).
5. E. L. BRADY und M. DEUTSCH, *Phys. Rev.* **72**, 870 (1947).
6. E. L. BRADY und M. DEUTSCH, *Phys. Rev.* **74**, 154 (1948); M. DEUTSCH und F. METZGER, *Phys. Rev.* **74**, 1542 (1948).
7. G. RACAH, *Phys. Rev.* **62**, 438 (1942).
8. ORNL-Report 1098.
9. C. N. YANG, *Phys. Rev.* **74**, 764 (1948).
10. L. C. BIEDENHARN, G. B. ARFKEN und M. E. ROSE, *Phys. Rev.* **83**, 586 (1951).
11. F. METZGER und M. DEUTSCH, *Phys. Rev.* **78**, 551 (1950).
12. S. P. LLOYD, *Phys. Rev.* **89**, 619 (1953).
13. H. AEPPLI, H. FRAUENFELDER, und M. WALTER, *Helv. Phys. Acta* **24**, 335 (1951).
14. M. E. ROSE, L. C. BIEDENHARN und G. B. ARFKEN, *Phys. Rev.* **85**, 5 (1952).
15. F. K. MCGOWAN und L. C. CAMPBELL, *Phys. Rev.* **92**, 523 (1953).
16. N. GOLDBERG und S. FRANKEL, *Phys. Rev.* **93**, 1425 (1954).
17. D. L. FALKOFF und G. E. UHLENBECK, *Phys. Rev.* **79**, 334 (1950).
18. T. B. NOVEY, *Phys. Rev.* **78**, 66 (1950).
19. H. ROSE, *Phil. Mag.* **43**, 1146 (1952).
20. G. VALLADAS, J. TEILLAC, P. FALK-VAIRANT und P. BENOIST, vor Veröffentlichung in *J. Physique*.
21. S. DE BENEDETTI und G. H. MINTON, *Phys. Rev.* **85**, 944 (1952).
22. H. AEPPLI, H. S. BISHOP, H. FRAUENFELDER, M. WALTER und W. ZÜNTZ, *Phys. Rev.* **82**, 550 (1951).
23. H. FRAUENFELDER, *Phys. Rev.* **82**, 549 (1951).
24. H. AEPPLI, H. ALBERS-SCHÖNBERG, H. FRAUENFELDER und R. SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **25**, 339 (1952).
25. H. ALBERS-SCHÖNBERG, F. HÄNNI, E. HEER, T. B. NOVEY und P. SCHERRER, *Phys. Rev.* **90**, 322 (1953).
26. A. BOHR und B. R. MOTTelson, *Dan. Math. Fys. Medd.* **27**, Nr. 16 (1953).
27. A. ABRAGAM und R. V. POUND, *Phys. Rev.* **92**, 943 (1953).
28. P. B. HEMMIG und R. M. STEFFEN, *Phys. Rev.* **92**, 832 (1953).
29. J. M. BLATT und C. L. BIEDENHARN, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 258 (1952).
30. R. F. CHRISTY, *Phys. Rev.* **89**, 839 (1953).

Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel

Von

Ernst Melan, Wien

Mit 2 Abbildungen

(Eingelangt am 23. Mai 1955)

Ein mit der Zeit t veränderliches Temperaturfeld T eines festen Körpers mit der Temperaturleitzahl a genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

wo Δ den LAPLACESchen Operator bedeutet.

Hat man die Temperaturverteilung ermittelt, so kann man mittels des thermisch-elastischen Verschiebungspotentiales Ψ die Spannungen berechnen; es gilt¹

$$\Delta \Psi = N T \quad \text{mit} \quad N = \frac{\alpha(1 + \mu)}{(1 - \mu)}; \quad (2)$$

wo α den Wärmeausdehnungskoeffizienten und μ das Verhältnis zwischen Querkontraktion und Längendehnung. Ferner bezeichnet G im folgenden den Schubmodul, bzw. E

$$E = 2(1 + \mu) G$$

den Youngschen Modul. Alle diese Größen seien von Temperatur und Zeit unabhängig vorausgesetzt.

Man kann sich leicht eine partikuläre Lösung von (2) beschaffen. Differenziert man diese Gleichung nach t , so erhält man mit Benützung von Gl. (1)

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} = N \frac{\partial T}{\partial t} = N a \Delta T$$

und hieraus

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = N a T,$$

$$\Psi = N a \int T dt. \quad (3)$$

¹ Vgl. MELAN-PARKUS, Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder, Wien 1953.

Für die Spannungen ergeben sich in kartesischen Koordinaten die Ausdrücke

$$\sigma_{ik} = -2G \left(\Delta \Psi \delta_{ik} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial i \partial k} \right), \quad \begin{aligned} \delta_{ik} &= 0 \quad \text{für } i \neq k \\ \delta_{ik} &= 1 \quad \text{für } i = k \end{aligned} \quad (4)$$

welche aber im allgemeinen die vorgeschriebenen Bedingungen an der Oberfläche nicht erfüllen werden. Es ist deshalb notwendig, einen weiteren Spannungszustand mit $T = 0$ zu überlagern und dadurch die Erfüllung der Oberflächenbedingungen zu erreichen. Man muß also die Lösung der Fundamentalaufgabe der Elastizitätstheorie, die Spannungen in einem festen Körper infolge der in dem vorliegenden Falle vorgeschriebenen Randbedingungen zu bestimmen, kennen.

Wir verwenden diese Methode zur Bestimmung des Spannungszustandes einer Kugel mit dem Radius c , die auf die Temperatur T_0 erwärmt, sich durch Eintauchen in eine Flüssigkeit von der Temperatur T_1 allmählich auf diese abkühlt. Unbeschadet der Allgemeinheit setzen wir $T_1 = 0$ und haben demnach eine Lösung von Gl. (1) zu ermitteln bei welcher zur Anfangszeit

$$\begin{aligned} &\text{für } t = 0 \text{ und } 0 \leq r \leq c & T &= T_0 \\ &\text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad r = c & T &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

wird.

Wir benützen räumliche Polarkoordinaten und da hier ein kugelsymmetrischer Zustand vorliegt, sind nur die Ableitungen nach r von Null verschieden. Der LAPLACESche Operator nimmt die Form an

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r T)}{\partial r^2}$$

und für das Temperaturfeld erhält man

$$T = -T_0 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} e^{-n^2 \omega} \quad (6)$$

$$\text{mit } \varrho = \frac{r \pi}{c} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{a}{c^2} \pi^2 t.$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck die Gl. (1) erfüllt, daß insbesondere auch die Bedingung für $t = 0$ erfüllt ist, folgt aus der Tatsache, daß

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} = -1$$

ist. Man erhält also für Ψ nach Gl. (3)

$$\Psi = 2 N T_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} \frac{c^2}{n^2 \pi^2} e^{-n^2 \omega}.$$

Für die Radialspannung σ_{rr} ergibt sich in Kugelkoordinaten weil

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}$$

nach Gl. (4)

$$\sigma_{rr} = -2G \left(\Delta \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) = -2G \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Die Tangentialspannungen $\sigma_{\varphi\varphi}$ bestimmt man am einfachsten aus der Bedingung, daß die Summe der Hauptspannungen, nämlich

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi} = -2G \Delta \Psi$$

invariant ist.

(Demnach ist

$$\sigma_{\varphi\varphi} = - \left(\frac{\sigma_{rr}}{2} + 2G \Delta \Psi \right) = - \left(\frac{\sigma_{rr}}{2} + 2G \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Psi)}{\partial r^2} \right)$$

Mit dem Wert für Ψ nach Gl. (7) erhält man

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -N T_0 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin n \varrho}{n \varrho} - \cos n \varrho \right) \frac{1}{n^2 \varrho} \frac{c}{\pi} e^{-n^2 \omega}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -N T_0 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin n \varrho}{n \varrho} - \cos n \varrho \right) \frac{1}{n^2 \varrho^2} e^{-n^2 \omega}$$

$$\frac{\partial^2 (r \Psi)}{\partial r^2} = -N T_0 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n} \frac{c}{\pi} e^{-n^2 \omega}$$

$$\Delta \Psi = -N T_0 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} e^{-n^2 \omega}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$K = \frac{4 E a T_0}{1 - \mu}$$

so wird

$$\sigma_{rr} = K \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin n \varrho}{n \varrho} - \cos n \varrho \right) \frac{1}{n^2 \varrho^2} e^{-n^2 \omega}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{K}{2} \left[\frac{\sigma_{rr}}{K} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} e^{-n^2 \omega} \right]$$

Die Spannungen müssen aber folgende Bedingungen erfüllen: für $t=0$ und $t \rightarrow \infty$ muß für $0 \leq r \leq c$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0$$

sein, denn die Kugel wird, da äußere Kräfte an der Oberfläche nicht vorhanden sind, bei gleichmäßiger Temperatur T_0 , bzw. 0° spannungslos.

Für alle $0 \leq t$ muß die Oberfläche frei von Normalspannungen sein, also

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \text{wenn} \quad r = c.$$

An der Oberfläche $r = c$ oder $\varrho = \pi$ nimmt σ_{rr} den Wert

$$\sigma_{rr} = -K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \omega}}{n^2 \pi^2}$$

an, sodaß wir einen allseitigen Spannungszustand

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \omega}}{n^2 \pi^2}$$

überlagern müssen, um die Oberfläche der Kugel frei von Normalspannungen zu erhalten. Es ergeben sich damit die endgültigen Spannungen

$$\bar{\sigma}_{rr} = K \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{\sin n \varrho}{n \varrho} - \cos n \varrho \right) + \frac{\varrho^2}{\pi^2} \frac{e^{-n^2 \omega}}{n^2 \varrho^2} \right]$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{K}{2} \left[-\bar{\sigma}_{rr} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} + \frac{3}{\pi^2 n^2} \right) e^{-n^2 \omega} \right].$$

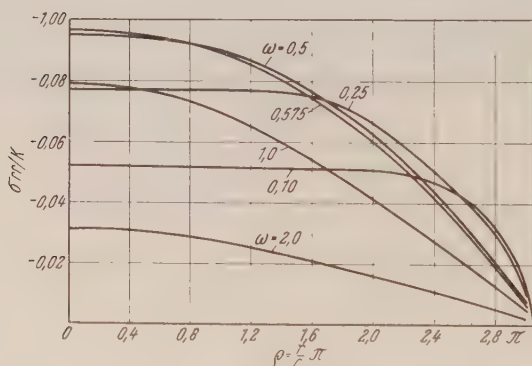


Abb. 1. Verlauf der Radialspannungen

Es ist nun tatsächlich der Anfangszustand ($\omega = 0$) für $0 \leq \varrho \leq \pi$

$$\bar{\sigma}_{rr} = 0,$$

denn die auftretenden Summen haben die Werte

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n \varrho} = -\frac{1}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n \varrho}{n^2 \varrho^2} = \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{12 \varrho^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n \varrho}{n^3 \varrho^3} = \frac{1}{12} - \frac{\pi^2}{12 \varrho^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

erner ist für $r=c$ und $t>0$

$$\bar{\sigma}_{rr} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = K \frac{3}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \omega}}{n^2}$$

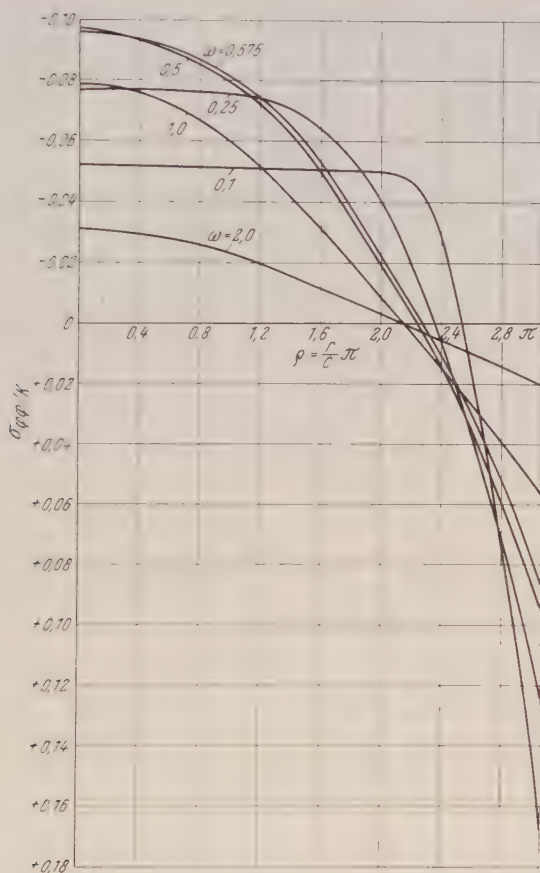


Abb. 2. Verlauf der Tangentialspannungen

in Kugelmittelpunkt tritt stets ein allseitiger Spannungszustand

$$\bar{\sigma}_{rr} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = K \left[\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \omega} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \omega}}{n^2} \right]$$

if. Die Radialspannungen sind stets Druckspannungen; sie erreichen ihr Maximum zur Zeit $t = 0,0583 c^2/a$ (entsprechend dem Wert $\omega = 0,575$) mit

$$\bar{\sigma}_{rr} = -0,0965 K.$$

Die Tangentialspannungen $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ sind im Inneren der Kugel Druckspannungen, im äußeren Teil Zugspannungen. Ihr größter Wert tritt an der Oberfläche zur Zeit $t = 0$ auf und beträgt

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{4} K.$$

Die Abb. 1 und 2 zeigen den Verlauf der Normalspannungen $\bar{\sigma}_{rr}/K$ und $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}/K$ in Abhängigkeit von $\varrho = r\pi/c$ für verschiedene Werte von

$$\omega = \frac{\pi^2 a}{c^2} t.$$

So ergibt sich für eine Stahlkugel von 10 cm Halbmesser mit einem Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, einer Poissonschen Konstanten $\mu = 0,3$ und einem Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ bei $T_0 = 200^\circ \text{C}$

$$K = 4 \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 200}{1 - 0,3} = 30\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Die größte Tangentialspannung (zur Zeit $t = 0$) wird

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{4} K = 7500 \text{ kg/cm}^2$$

die größte Radialspannung

$$\bar{\sigma}_{rr} = -0,0965 K = -2,895 \text{ kg/cm}^2;$$

sie tritt unter Annahme einer Wärmeleitzahl von $a = 460 \text{ cm}^2/\text{h}$ nach

$$t = 0,0583 \frac{10^2}{460} = 0,013 \text{ h} = 47 \text{ sec auf.}$$

On the Determination of the Equations of Motion from a General, Covariant, Non-linear Field Theory by the Approximation Method of Einstein, Infeld, and Hoffman

By

R. H. Penfield

and

Henry Zatzkis

Harpur College

Newark College of Engineering

(Received June 14, 1955)

1. Introduction

Many excellent papers¹⁻⁶ have been written on the determination of the equations of motion from the field equations of general relativity first initiated by EINSTEIN and his collaborators. As is well known, the problem is of importance because the general theory of relativity is the only successful field theory in which the equations of motion of particles, considered as mathematical singularities in the field, are determined by the field equations. The equations of motion arise from the field equations for two entirely different reasons—reasons inherent in the theory itself and reasons inherent in the approximation method used.

The field equations of the general theory of relativity are so formulated that they are inherently covariant to arbitrary coordinate transformations in space-time, and at the same time, the covariance requirement results in non-linear field equations. The non-linearity and covariance of the theory are decisive in determining the equations of motion.

The approximation method requires that no spontaneous radiation shall emanate from the singularities and this is equivalent to the statement that the field variables change in time no faster than necessitated by the motion of the singularities. Since the motion of the singularities is considered slow compared to the velocity of light c , differentiation of the field variables with respect to time reduces the

¹ A. EINSTEIN and L. INFELD, *Ann. of Math.*, vol. 41, No. 2 (1940) 455.

² L. INFELD and R. P. WALLACE, *Phys. Rev.*, vol. 57, (1940) 797.

³ P. G. BERGMANN, *Phys. Rev.*, vol. 75, 680 (1949).

⁴ A. EINSTEIN and L. INFELD, *Can. J. of Math.*, vol. 1, No. 3 (1949).

⁵ P. G. BERGMANN and R. SCHILLER, *Phys. Rev.*, vol. 89, No. 1 (1953) 4.

⁶ J. N. GOLDBERG, *Phys. Rev.*, vol. 89, No. 1 (1953) 263.

order of magnitude in each step of the approximation method. The field variables are expanded in the form of a power series with respect to some parameter of smallness λ . λ could represent the ratio of the particle velocity to the velocity of light v/c . That is

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^0 + \lambda g_{\alpha\beta}^1 + \lambda^2 g_{\alpha\beta}^2 + \lambda^3 g_{\alpha\beta}^3 + \dots$$

It is the purpose of the present paper to give a comparatively simple general formulation of the equations of motion of the singularities in a wide class of fields whose field variables y_A satisfy field equations which are covariant, non-linear, and result from a variational principle. The main ideas are due to P. G. BERGMANN⁷; but since they are only briefly described by him, the authors would like to present this more complete account of the problem. It is hoped that a clearer understanding of how the equations of motion of the singularities are determined from the field equations will result. Lastly, it is pointed out that the full power of the generalized Bianchi identities which occur in this theory as well as in the general theory of relativity, has not been used in any treatments existing today. Considering the significance of the identities, their incomplete use probably means a severe loss in the physics that the theory originally contained.

2. The Field Variables and the Lagrangian⁸

The exact nature of the field variables will be left unspecified and denoted by y_A , ($A = 1, \dots, N$). It is assumed that the field equations can be derived from a variational principle of the form

$$\delta I = 0, \quad I = \int_V L(y_A; y_{A,e}) d^4x \quad (1)$$

where

$$L = \Lambda^{AeB\sigma} y_{A,e} y_{B,\sigma}; \Lambda^{AeB\sigma} = \Lambda^{AeB\sigma}(y_C).$$

Greek indices, taking the values 1, 2, 3, 4 refer to space and time; while small Latin indices, taking the values 1, 2, 3, refer to space coordinates only. The coefficients $\Lambda^{AeB\sigma}$ have the following symmetry property

$$\Lambda^{AeB\sigma} = \Lambda^{B\sigma Ae}. \quad (2)$$

The field equations which result from a variation of the LAGRANGIAN will be denoted by $L^A = 0$;

$$\begin{aligned} L^A &= \partial^A L - (\partial^{A,e} L)_{,e} \\ L^A &= \partial^A L - \partial^B \partial^{A,e} L y_{B,e} - \partial^{B,\sigma} \partial^{A,e} L y_{B,\sigma e} \\ L^A &= \partial^A \Lambda^{BeC\sigma} y_{B,e} y_{C,\sigma} - M^{ABeC\sigma} y_{B,e} y_{C,\sigma} - L^{AeB\sigma} y_{B,\sigma e} \end{aligned} \quad (3)$$

where the following definitions have to be made

$$\begin{aligned} y_{A,e} &= \frac{\partial y_A}{\partial x^e}; & \partial^A L &= \frac{\partial L}{\partial y_A}; & \partial^{A,e} L &= \frac{\partial L}{\partial y_{A,e}}; \\ L^{AeB\sigma} &\equiv \Lambda^{AeB\sigma} + \Lambda^{A\sigma Be}; & M^{ABeC\sigma} &\equiv \partial^A \Lambda^{BeC\sigma} + \partial^A \Lambda^{C\sigma Be}. \end{aligned} \quad (4)$$

⁷ P. G. BERGMANN, Phys. Rev., vol. 75 (1949) 680.

⁸ A. EINSTEIN and L. INFELD, Can. J. of Math., vol. 1, No. 3 (1949).

Regardless of whether the field equations are satisfied or not, L^A will be used for the left hand side of these equations.

3. The Transformation Law and the Covariance Requirement

With respect to infinitesimal coordinate transformations, the field variables will be assumed to transform according to the law

$$\bar{\delta} y^A \equiv F_{A\mu}^{B\nu} y_B \delta x^\mu_{,\nu} - y_{A,\mu} \delta x^\mu \quad (5)$$

where

$$\bar{\delta} y_A \equiv \bar{y}_A(x^e) - y_A(x^e).$$

The four functions δx^μ represent the infinitesimal changes of the coordinate values of a fixed world point. The $F_{A\mu}^{B\nu}$ are numbers which depend on the type of field variables which represent the field, but are independent of the values of the field variables and the coordinate system used. The second term of equation 5 is a transport term. With its inclusion in the transformation law, the transformed y_A at a point in the new system are compared with the original y_A at a point in the original system such that the coordinate values of the original point are the same as the coordinate values of the new point. Consequently, the $\bar{\delta} y_A$ represent a change of the field variables in their functional dependence upon their arguments x^e . The inclusion of the transport term allows one to assert that

$$\bar{\delta} y_{A,e} = (\bar{\delta} y_A)_{,e}.$$

If the transport term were not included, this interchange in order would not be valid. If the y_A are identified with the components of the metric tensor $g_{\mu\nu}$, then

$$F_{A\mu}^{B\nu} = F_{a,\mu}^{b,\nu} = \frac{1}{2} (\delta_a^\nu \delta_\mu^\beta \delta_\beta^b - \delta_\mu^\beta \delta_\beta^b \delta_a^\nu - \delta_a^\beta \delta_\mu^\nu \delta_\beta^b - \delta_\beta^b \delta_\mu^\nu \delta_a^\beta). \quad (6)$$

In order that the field equations be covariant under the infinitesimal transformation, it is sufficient to require that the LAGRANGIAN transform according to

$$\bar{\delta} L = Q^\mu_{,\mu} \quad (7)$$

as a result of the infinitesimal transformation of the field variables. Here $\bar{\delta} L$ has the same significance as before, namely

$$\bar{\delta} L = L(\bar{y}_A(x^\mu); \bar{y}_{A,e}) - L(y_A(x^\mu); y_{A,e}). \quad (8)$$

As a direct consequence of the covariance requirement and the transformation law for the y_A , one obtains four identities

$$F_{A\mu}^{B\nu} (y_B L^A)_{,\nu} + y_{A,\mu} L^A \equiv 0. \quad (9)$$

These can be called the generalized Bianchi identities and they play the analogous role in this theory of the BIANCHI identities in the general theory of relativity. Upon substituting the expressions for L^A and $L^A_{,r}$ one must require that similar types of terms cancel each other identically. This leads to three identities derived from equation 9 which we will now record.

The terms leading to third derivatives must cancel each other identically, and therefore one gets

$$F_{A\mu}^{B\varrho} \gamma_B L^{AC\sigma\tau} \gamma_{C,\varrho\sigma\tau} \equiv 0. \quad (10a)$$

This means that upon symmetrization the coefficient of $\gamma_{C,\varrho\sigma\tau}$ must vanish identically

$$\begin{aligned} (F_{A\mu}^{B\varrho} \gamma_B L^{AC\varrho\sigma})_{SYM} &\equiv 0, \\ L^{AC\varrho\sigma} &= \frac{1}{2}(L^{A\varrho C\sigma} + L^{A\sigma C\varrho}). \end{aligned} \quad (10b)$$

Here the subscript *SYM* means that the quantity in brackets must be symmetrized with respect to ϱ, σ, τ . As will be seen, this identity results in the determination of the equations of motion of the singularities from the field equations and plays the role in this theory of the *lemma* in reference 1, page 3.

Two other identities can be obtained from the equation (9) but these identities do not seem to play an important part in the equations of motion. As far as the authors know, no one has been able to demonstrate their significance, although conceptually they are just as fundamental as equation (10 b). It would seem that a clarification of their role in the theory is badly needed. These two identities will be spelled out for the sake of completeness. The first is

$$(F_{A\mu}^{B\nu} W^{AC\omega H\tau} + F_{A\mu}^{D\nu} \gamma_D \partial^B W^{AC\omega H\tau} + \delta_\mu^\nu W^{BC\omega H\tau}) \gamma_{B,\nu} \gamma_{C,\omega} \gamma_{H,\tau} \equiv 0 \quad (11a)$$

which results in

$$[\partial^B (F_{A\mu}^{D\nu} \gamma_D W^{AC\omega H\tau}) + \delta_\mu^\nu W^{BC\omega H\tau}]_{SYM} \equiv 0 \quad (11b)$$

where

$$W^{AC\omega H\tau} = \partial^A \Lambda^{C\omega H\tau} - \partial^C \Lambda^{A\omega H\tau} - \partial^H \Lambda^{A\tau C\omega}.$$

This identity arises strictly because of the non-linear terms and would not exist in a linear theory. As has been said before, the effect of this identity (11 b) on the motion of the singularities has not been made clear.

The last identity is

$$\begin{aligned} [(F_{A\mu}^{H\tau} + \delta_\mu^\tau \delta_A^H) L^{C\sigma A\nu} - (F_{A\mu}^{B\nu} \gamma_B W^{AC\sigma H\tau})_{SYM} + \\ + F_{A\mu}^{B\tau} \gamma_B \partial^H L^{C\sigma A\nu}] \gamma_{H,\tau} \gamma_{C,\sigma\nu} \equiv 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

which results in

$$\begin{aligned} (F_{A\mu}^{H\tau} + \delta_\mu^\tau \delta_A^H) L^{C\sigma A\nu} - (F_{A\mu}^{B\nu} \gamma_B W^{AC\sigma H\tau})_{SYM} + \\ + F_{A\mu}^{B\tau} \gamma_B \partial^H L^{C\sigma A\nu} \equiv 0. \end{aligned} \quad (12b)$$

All terms in this identity except the first would not exist in a linear theory. The meaning of this identity is also obscure.

4. The Approximation Method

The field variables y_A are expanded in the form of power series with respect to some parameter of smallness λ (λ might be v/c)

$$y_A = \overset{0}{y}_A + \lambda \overset{1}{y}_A + \lambda^2 \overset{2}{y}_A + \lambda^3 \overset{3}{y}_A + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \overset{l}{y}_A. \quad (13)$$

where the index above the y_A indicates the order of the approximation and λ^l means λ to the l -th power. The $\overset{0}{y}_A$ are constant solutions of the field equations; for example, in the general theory of relativity the $\overset{0}{y}_A$ are the MINKOWSKI metric of flat space-time.

The terms L^A are expanded likewise

$$L^A = \overset{0}{L}^A + \lambda \overset{1}{L}^A + \lambda^2 \overset{2}{L}^A + \lambda^3 \overset{3}{L}^A + \dots \quad (14)$$

where the objective is to satisfy successively each approximation of the field equations. The assumption that the field variables change no faster than the motion of the singularities requires that the forming of time derivative raises the order of the time-differentiated quantities according to the scheme indicated on the next page.

$$\begin{aligned} y_{A,r} &= \lambda \overset{1}{y}_{A,r} + \lambda^2 \overset{2}{y}_{A,r} + \lambda^3 \overset{3}{y}_{A,r} + \dots \\ y_{A,4} &= \lambda^2 \overset{1}{y}_{A,4} + \lambda^3 \overset{2}{y}_{A,4} + \dots \\ y_{A,44} &= \lambda^2 \overset{1}{y}_{A,44} + \lambda^3 \overset{2}{y}_{A,44} + \dots \\ y_{A,4r} &= \lambda^2 \overset{1}{y}_{A,4r} + \lambda^3 \overset{2}{y}_{A,4r} + \dots \\ y_{A,rs} &= \lambda \overset{1}{y}_{A,rs} + \lambda^2 \overset{2}{y}_{A,rs} + \lambda^3 \overset{3}{y}_{A,rs} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Similar expansions can be given for each quantity appearing in L^A (equation 3). For example

$$\partial^A A^{C\omega H\tau} = \overset{0}{\partial^A A^{C\omega H\tau}} + \lambda \overset{1}{\partial^A A^{C\omega H\tau}} + \lambda^2 \overset{2}{\partial^A A^{C\omega H\tau}} + \dots \quad (16)$$

When all the expansions are so made, one obtains

$$\begin{aligned} \overset{0}{L}^A &\equiv 0, \\ \overset{1}{L}^A &= -\overset{0}{L}^A n C s \overset{1}{y}_{C,ns}, \\ \overset{2}{L}^A &= -\overset{0}{L}^A n C s \overset{2}{y}_{C,ns} - \overset{0}{L}^A n C 4 \overset{1}{y}_{C,n4} - \overset{0}{L}^A 4 C 4 \overset{1}{y}_{C,44} + \\ &\quad + \overset{0}{W}^A B r C s \overset{1}{y}_{B,r} \overset{1}{y}_{C,s} - \overset{1}{L}^A n C s \overset{1}{y}_{C,ns}. \end{aligned} \quad (17)$$

Before listing the higher approximations, it is well to notice that if the first approximation ($\overset{1}{L}^A \equiv 0$) has been satisfied, all terms in $\overset{2}{L}^A$ except the first one are already determined as a result of solving the first approximation. In the same way

$$\begin{aligned}
L^3 &= -L^{0nCs} y_{C,ns}^3 + \text{other terms of lower approximation} \\
L^4 &= -L^{0nCs} y_{C,ns}^4 + \text{other terms of lower approximation} \\
&\dots\dots\dots \\
L^n &= -L^{0nCs} y_{C,ns}^n + \text{other terms of lower approximation.}
\end{aligned}$$

One notices that in any approximation all terms but one belong to a lower approximation and, therefore, are known if the field equations of the lower approximation have been satisfied. This is of fundamental importance in motion of singularities.

For the first approximation the identity (10 a) becomes

$$F_{A\mu}^{Br} y_B^0 L^{AnCs} y_{C,nsr}^1 \equiv 0 \quad (18)$$

regardless of whether the $y_{C,nsr}^1$ satisfy the first order field equations or not. As a consequence of this, one obtains

$$F_{A\mu}^{Br} y_B^0 L^{AnCs} y_{C,nsr}^l \equiv 0 \quad (19)$$

where y_C^l is the l -th approximation to the field variables y_C . For this identity to hold the $y_{C,nsr}^l$ do not need to satisfy the field equations of the l -th approximation.

One begins the approximation procedure by solving the first approximation to the field equations

$$L^1 = -L^{0nCs} y_{C,ns}^1 = 0. \quad (20)$$

This is a system of linear homogeneous, partial differential equations for the y_C^1 . The solution is determined up to arbitrary functions of the time. In the general theory of relativity, this solution has poles indicating the presence of singularities. One usually considers the arbitrary functions of the time as the positions of the singularities⁹. Only simple poles are considered and the y_C^1 (containing the arbitrary) time functions are considered as known for the second approximation:

$$\begin{aligned}
L^2 &= -L^{0nCs} y_{C,ns}^2 - L^{0nC4} y_{C,n4}^1 - L^{04C4} y_{C,44}^1 - L^{0nCs} y_{C,ns}^1 + \\
&\quad + W^{ABrCs} y_{B,r}^1 y_{C,s}^1 = 0.
\end{aligned} \quad (21)$$

This is a system of linear inhomogeneous partial differential equations for the y_C^2 as unknown. However, before one actually solves these equations for the second approximation, it can be shown that the second approximation, if it is to exist, imposes conditions on the first approximation already obtained. To this end we multiply equation (21) by $F_{A\mu}^{Br} y_B^0$ and obtain

$$F_{A\mu}^{Br} y_B^0 L^2 = 0 \quad (22)$$

⁹ See reference 1, page 3.

only in regions where the field equations are satisfied. Now we integrate these equations over a closed two-dimensional surface surrounding one singularity:

$$\oint F_{A\mu}^{Br} \overset{0}{y}_B \overset{0}{L}^{AnCs} \overset{2}{y}_{C,ns} n_r ds = - \oint F_{A\mu}^{Br} \overset{0}{y}_B \cdot (\text{terms of 1st approximation only}) n_r ds. \quad (23)$$

Since the relationships (19) are satisfied regardless of the choice of second order field variables, it is possible to satisfy the field equations outside the singular regions and to continue the second order variables throughout the interior of the singular regions with arbitrary continuous and three times continuously differentiable functions. Then GAUSS' theorem can be applied to the three-dimensional domain which includes a singular region but which is bounded by a closed surface on which the field equations are satisfied, that is

$$\oint F_{A\mu}^{Br} \overset{0}{y}_B \overset{0}{L}^{AnCs} \overset{2}{y}_{C,ns} n_r dS = \iiint F_{A\mu}^{Br} \overset{0}{y}_B \overset{0}{L}^{AnCs} \overset{2}{y}_{C,nsr} dV \equiv 0. \quad (24)$$

The volume integral is zero because the integrand is zero according to equation 19. This equation plays the role of the closed surface integral of a curl vanishing in the theory of relativity. Therefore, one obtains as a condition on the first approximation

$$\oint F_{A\mu}^{Bt} \overset{0}{y}_B (\text{terms of first approximation}) n_t dS = 0. \quad (25)$$

If the surface integral encloses a singularity, these four conditions ($\mu = 1, \dots, 4$) represent the three equations of motion and the conservation of mass. These conditions give differential equations to be satisfied by the arbitrary time functions; that is, the three coordinates of the singularity $y^r(t)$ and $\mu(t)$ where μ is the mass of the singularity.

The same situation is maintained with all the higher approximations as can easily be seen by examining equation 17. In each case the approximation to be determined, $\overset{l}{y}_C$, enters the equations in exactly the same form. In each approximation, we get conditions of the type (25); that is, in the l -th approximation one gets surface integrals involving the $(l-1)$ -th approximation.

If the surface encloses no singularities, the integral (25) vanishes identically and, therefore, gives no condition on the first approximation. This can be shown by considering the generalized BIANCHI identities which give in second approximation

$$F_{A\mu}^{Bt} \overset{0}{y}_B \overset{2}{L}^A_{,t} \equiv 0 \quad \text{if } \overset{1}{L}^A = 0 \text{ throughout the domain } V. \quad (26)$$

Remembering that

$$L^A = -L^{A n C s} y_{C, n s}^2 + \text{terms of 1st approximation occurring in equation (25),} \quad (27)$$

and that

$$F_{A\mu}^{Bt} y_B^0 L^{A n C s} y_{C, n s t}^2 \equiv 0, \quad (28)$$

one sees that

$$F_{A\mu}^{Bt} y_B^0 \cdot (\text{terms of 1st approximation})_{,t} \equiv 0. \quad (29)$$

Therefore the surface integral

$$\oint F_{A\mu}^{Bt} y_B^0 \cdot (\text{terms of 1st approximation}) n_r dS$$

vanishes, because it can be changed into the volume integral (in the absence of singularities)

$$\iiint_V F_{A\mu}^{B\sigma} y_B^0 \cdot (\text{terms of 1st approximation})_{,t} dV$$

whose integrand vanishes identically.

Über die Berechnung von Kernmomenten nach dem Schalenmodell

Von

T. Kassecker und P. Urban

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz

(Eingelangt am 16. Juli 1955)

Einleitung

Durch die Kernmomentenforschung wurde in den letzten beiden Jahrzehnten ein großes Material an Zahlenwerten über Drehimpulse, magnetische Dipolmomente und elektrische Quadrupolmomente der Atomkerne zusammengetragen. Eine eingehende Beschreibung der verschiedenen experimentellen Methoden gibt N. F. RAMSEY in seinem Beitrag zu dem von E. SEGRÈ herausgegebenen Buch „Experimental Nuclear Physics“ [1].

Auf Grund der wiederholt veröffentlichten Zusammenstellungen des umfangreichen empirischen Materials (z. B. der Tabellen von MACK, AJZENBERG und LAURITSEN oder KLINKENBERG [2]) konnten gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen den Momenten und dem Kernaufbau festgestellt werden [3].

Zu den ersten Versuchen einer theoretischen Berechnung gehört die von TH. SCHMIDT [4] erkannte allgemein gültige Beziehung zwischen Kerndrehimpuls und magnetischem Moment. Ausgehend von der Annahme, daß der Drehimpuls J eines Kernes mit ungerader Massenzahl gleich dem aus Bahndrehimpuls l und Spin $\frac{1}{2}$ zusammengesetzten Gesamtdrehimpuls $j = l \pm \frac{1}{2}$ des einzelnen Nucleons (Neutrons oder Protons) sei, berechnet er das diesem einzelnen Nucleon zukommende magnetische Moment für die Fälle $l = J - \frac{1}{2}$ und $l = J + \frac{1}{2}$ als Funktion von J . Die empirisch gefundenen Momente aller Kerne mit ungerader Massenzahl liegen zwischen diesen beiden „SCHMIDT-Linien“, die im $J - \mu$ Diagramm im Falle des einzelnen Protons mit J steigen, im Falle des einzelnen Neutrons horizontal verlaufen (das magnetische Moment des Protons besteht aus einem dem Bahndrehimpuls und einem dem Spin proportionalen Anteil, das des Neutrons nur aus einem dem Spin proportionalen Term). Daß Kerne mit gerader Massenzahl im Grundzustand den Drehimpuls $J = 0$ besitzen und weder magnetische noch elektrische Momente aufweisen, paßt gut in dieses Bild.

ELSASSER, HEISENBERG, BETHE u. a. [5], [6] hatten bereits damals ein Einteilchenmodell, das der Individualität der Nucleonen im Kern Rechnung trägt, mit Hilfe des schon früher zur Beschreibung der Elektronenhülle verwendeten HARTREE-Verfahrens entwickelt. (Die Wechselwirkung eines beliebig herausgegriffenen Nucleons mit allen anderen wird durch ein zentralsymmetrisches Hilfspotential ersetzt, indem sich jedes Nucleon unabhängig von den restlichen bewegt.) Aus der Lage und Multiplizität der Energieniveaus, die aus dem Oszillatorpotential für leichte Kerne, bzw. aus dem Rechteckpotential für schwere Kerne berechnet wurden, konnten die ersten drei „magischen Nucleonenzahlen“ erklärt werden. Mit diesem Ausdruck werden die Protonen-, bzw. Neutronenzahlen derjenigen Elemente bezeichnet, die sich durch ihre große Bindungsenergie, die Zahl ihrer Isotopen und ihre kosmischen Elementhäufigkeiten deutlich gegenüber ihren Nachbarkernen auszeichnen. Neben diesen Daten, die den Abschluß einer Nucleonenschale im Kernaufbau manifestieren, weist auch die große Zahl der isomeren Zustände der Kerne mit fast voll besetzten Schalen sowie der Vorzeichenwechsel des Quadrupolmoments beim Übergang von einer Schale zur nächst höheren [3] deutlich auf die Schalenstruktur hin. Die Tatsache, daß sich für die Protonenzahl Z und die Neutronenzahl N , unabhängig voneinander dieselben magischen Zahlen herausheben, obwohl bei den stabilen Kernen der Neutronenüberschuß $N - Z$ mit zunehmender Massenzahl $A = N + Z$ systematisch anwächst, ist die wichtigste empirische Rechtfertigung für diese Kernmodelle, bei denen den einzelnen Nucleonen ein hohes Maß von Individualität im Kerngefüge belassen bleibt. Berechnungen der Kerndrehimpulse und der magnetischen Momente der leichten Kerne (bis $N = 20$) im Rahmen der Einteilchenmodelle führten unter anderem BETHE und ROSE, PHILLIPS und NORDHEIM [7] durch.

Unter den zahlentheoretischen Ableitungen der magischen Nucleonenzahlen war die von E. BAGGE [8] die einzige, die die beiden Zahlenfolgen 2, 4, 8, 14, 22 ... und 2, 6, 14, 28, 50, 82, 126 ... als Funktionswerte einer einzigen, von zwei Parametern abhängigen Formel lieferte. Die aus dieser Arbeit ersichtlichen Besetzungszahlen der einzelnen Nucleonenschalen waren der Ausgangspunkt für das von HAXEL, JENSEN und SUESS [9] ausgearbeitete Schalenmodell. Gleichzeitig folgerte M. GOEPPERT-MAYER [10] aus einem Vergleich der magischen Nucleonenzahlen mit der Multiplizität und der Lage der Energieniveaus in dem von FEENBERG und WIGNER [5] berechneten Einteilchenmodell, daß eine Aufspaltung jeder Nucleonenschale in zwei durch eine relativ große Energiedifferenz getrennte Unterschalen angenommen werden muß. Als Ursache dieser Aufspaltung postulierten beide unabhängig voneinander eine starke Spin-Bahn-Kopplung für die einzelnen Kernteilchen; dadurch zerfällt jeder durch einen bestimmten Bahndrehimpuls 1 charakterisierte Zustand in zwei weit getrennte Niveaus mit dem Gesamtdrehimpuls $j = 1 - \frac{1}{2}$ und $j = 1 + \frac{1}{2}$, wobei der letztere der energetisch tiefere ist. Der Abstand beträgt ungefähr das zwanzig-

fache der bei den Hüllenelektronen auftretenden Dublettaufspaltung und steigt proportional 1 an. Die Gesamtdrehimpulse der Nucleonen, deren Zustandsfunktionen wieder nach dem HARTREE-Verfahren mit dem Oszillator-, bzw. Kastenpotential berechnet werden, setzen sich vektoriell zum Drehimpuls des Kerns zusammen, und zwar in der Weise, daß der Drehimpuls paarweise vorhandener Nucleonen Null ist. Die Zustandsfunktion des Kerns ist wegen der Gültigkeit des PAULI-Prinzips für die Nucleonen das vollständig antisymmetrische Produkt aller Einteilchenfunktionen. Dieses $j-j$ Kopplungs-Schalenmodell gibt die Energieniveaus sowie die empirisch gefundenen J - und μ -Werte überraschend gut wieder [11], kann aber noch nicht die volle Größe der Abweichungen von den SCHMIDT-Linien erklären. Immerhin konnte KURATH [12] nachweisen, daß die mit diesem Modell berechneten Werte besser mit der Erfahrung übereinstimmen, als die unter Verwendung der RUSSEL-Sounders (LS)-Kopplung ermittelten. INGLIS [13] zeigte, daß bei Annahme einer mittleren Kopplung die $j-j$ Kopplung überwiegt. Das Vorzeichen der Quadrupolmomente wird durch dieses Modell richtig wiedergegeben, während sich ein besonders für die schweren Kerne zu kleiner Absolutbetrag Q ergibt.

Diese Unstimmigkeiten veranlaßen AGE BOHR, RAINWATER u. a. [14] zunächst, das große Quadrupolmoment der schweren Kerne durch eine Polarisierung, bzw. Rotation des nicht kugelsymmetrischen Kernrumpfes zu erklären und daraufhin aus einer Verbindung des in der Theorie der Kernspaltung mit Erfolg verwendeten Tröpfchenmodells mit dem Einteilchenmodell das sogenannte „collective model“ zu konstruieren. Zur Rotations- und Schwingungsenergie des deformierten Kernrumpfes addiert sich die Energie eines oder mehrerer „Leuchtnucleonen“, die sich im Feld dieses Kernrumpfes bewegen. Die berechneten Q - und μ -Werte rücken recht nahe an die beobachteten Werte heran, jedoch ist die Anwendung dieses Modells, wie BOHR selbst ausführt, auf die schweren Kerne ($A > 20$) beschränkt.

Es ergeben sich aber auch Möglichkeiten, bessere Übereinstimmung mit den empirischen Werten durch verhältnismäßig geringfügige Modifikationen des MAYER-JENSEN Modells zu erzielen. AKITO ARIMA und HISASHI HORIE [15] konnten die Abweichungen von den SCHMIDT-Linien bis auf 10% verkleinern durch Mischung aller Konfigurationen, in welchen außer dem unpaarigen Nucleon jeweils zwei Nucleonen der letzten vollbesetzten Schale zum Drehimpuls des Kernes beitragen, für die sie die Mischungskoeffizienten durch Störungsrechnung ermittelten. A. B. VOLKOV [16] berechnet magnetische Momente und verbotene Dipolübergänge mit dem „statistischen Schalenmodell“, in welchem er annimmt, daß aus einer größeren Gesamtheit von Kernen gleich viele in jedem nach dem Einzelnucleonen-Schalenmodell möglichen Zustand sind, was allerdings eine ziemlich willkürliche Festsetzung darstellt. Physikalisch sinnvoller ist es, die Kernmomente mit Hilfe der energetisch günstigsten Mischung zu berechnen, wie es SCHULTEN [17] durchführt. Er konstruiert die Zustandsfunktionen der 1 s - und 2 p -Schalen

durch Abzählung der zu bestimmten Drehimpuls- und Isotopenspin-Eigenwerten gehörigen Konfigurationen und behandelt bei der Energievariation die Spin-Bahn-Kopplung als Störung der WIGNER-, HEISENBERG-, BARTLETT- und MAJORANA-Wechselwirkung. A. FLORIAN [18] führt zur Berechnung der Energieniveaus leichter Kerne ein allgemeines gruppentheoretisches Verfahren für die Aufstellung der Zustandsfunktionen ein, deren Mischung wieder durch Energievariation ermittelt wird.

Mit Hilfe der so konstruierten allgemeinen Zustandsfunktionen ist es nun möglich, eine allgemeine Berechnung der Kernmomente durchzuführen, das heißt die Erwartungswerte der Momente explizit als Funktionen der Quantenzahlen der besetzten Nucleonenzustände anzugeben. Bei der Berechnung der Erwartungswerte für das elektrische Quadrupolmoment und das magnetische Moment müssen keinerlei einschränkende Annahmen über die Kernladungs- und Massenzahl sowie über den Gesamtdrehimpuls und die Parität getroffen werden, was eine Erweiterung der Arbeit von SCHULTEN bedeutet, die sich auf die Behandlung von Kernen mit teilweise besetzter $2p$ -Schale beschränkt.

Im Anschluß an diesen allgemeinen Teil werden für vier Kerne die Zahlenwerte ermittelt, wobei für die Kerne N^{15} und O^{17} experimentelle Vergleichswerte vorliegen. Die Übereinstimmung mit den gemessenen Werten kann als befriedigend bezeichnet werden, wobei noch zu bedenken ist, daß die beiden Kerne N^{15} und O^{17} nur je ein Nucleon außerhalb abgeschlossener Schalen besitzen und daher in diesem Spezialfall keine Verbesserung der Übereinstimmung durch Variation der Energie erreicht werden kann, wenn man wie üblich alle vollbesetzten Schalen als Kernrumpf mit dem Drehimpuls Null behandelt. Die Näherung in dieser Richtung weiter zu treiben, wäre nicht sinnvoll wegen des weitaus größeren Einflusses des Wechselwirkungspotentials der Nucleonen, über das grundsätzlich genaueres noch nicht bekannt ist.

I. Die Zustandsfunktionen

Nach dem HARTREE-Verfahren wird jedes Kernteilchen für sich als unabhängiges Teilchen behandelt und die Wechselwirkung mit den übrigen Nucleonen durch ein zentralsymmetrisches Potential ersetzt. Wir verwenden das für die leichteren Kerne zweckmäßigere Oszillatorpotential und nehmen für die einzelnen Nukleonen starke Spin-Bahn-Kopplung an. Die Einteilchenfunktionen sind Lösungen der Wellengleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} - \frac{\lambda}{2} \frac{\hbar^2 \omega^2}{m c^2} (\sigma \cdot \mathfrak{r}) - V_0 + \frac{m \omega^2 r^2}{2} \right) \Psi = \varepsilon \Psi, \quad (1)$$

worin m = Masse eines Protons oder Neutrons,
 ω = Kreisfrequenz des harmonischen Oszillators,
 V_0 = konstanter Anteil des Potentials,
 λ = Konstante der Spin-Bahn-Kopplung,
 σ_i = PAULISCHE Spinmatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{r} \times \vec{p}_{op}) = \text{Drehimpulsoperator}$$

bedeuten und lauten daher für die beiden Fälle

a) Spin parallel zum Bahndrehimpuls ($j = 1 + \frac{1}{2}$)

$$\Psi = \frac{Nf}{r} Q_{jm}^+ = f_{nl}(r) Q_{jm}^+ = \quad (2)$$

$$= N e^{-\frac{a}{2} r^2} r^1 L_n^{(l-1/2)}(a r^2) \left(v_+ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} P_{j-1/2}^{m-1/2} + v_- \sqrt{\frac{j-m}{2j}} P_{j-1/2}^{m+1/2} \right)$$

b) Spin antiparallel zum Bahndrehimpuls ($j = 1 - 1/2$)

$$\Psi = \frac{Nf}{r} Q_{jm}^- = f_{nl}(r) Q_{jm}^- = \quad (3)$$

$$= N e^{-\frac{a}{2} r^2} r^1 L_n^{(l+1/2)}(a r^2) \left(-v_+ \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} P_{j+1/2}^{m-1/2} + \right. \\ \left. - v_- \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} P_{j+1/2}^{m+1/2} \right)$$

Es sind die Funktionen $L_n^{(k)}(x)$ LAGUERRE Polynome

$$L_n^{(k)}(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) = \sum_{s=0}^n \binom{n+k}{n-s} \frac{(-x)^s}{s!}$$

mit der Abkürzung $a = \frac{m\omega}{\hbar}$

und P_l^m Kugelfunktionen

$$P_l^m = \left[\frac{2(l-m)!}{4\pi} \right]^{1/2} \sum_s \frac{(l-m)! (l-m)!}{s! (s-m)! (l-2s+m)!} \left(-\frac{1}{4} \right)^s \cdot \\ \cdot \sin \vartheta^{2s-m} \cos \vartheta^{l-2s+m} e^{im\varphi}, \\ P_l^{*m} = (-1)^m P_l^{-m}.$$

N ist ein Normierungsfaktor, der so gewählt wird, daß

$$\int \Psi^* \Psi d\tau = 1.$$

Bezeichnen wir die Eigenfunktionen der Isotopenspinoperatoren $\vec{\tau}^2$ und τ_3

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mit t^+ und t^- ($\tau_3 t^+ = t^+$, $\tau_3 t^0 = -t^0$)

so heißen die Nucleonenfunktionen

$$\begin{cases} \psi = \Psi t^+ & \text{für ein Proton und} \\ \psi = \Psi t^0 & \text{für ein Neutron.} \end{cases} \quad (4)$$

Wir wollen im folgenden die Quantenzahlen zur Bezeichnung des Energieniveaus und der Zustandsfunktion eines bestimmten Teilchens verwenden.

Für allgemeine Rechnungen, bei denen es auf den Zahlenwert der einzelnen Quantenzahlen nicht ankommt, nehmen wir zur Hauptquantenzahl n , der Bahndrehimpulsquantenzahl l , der Gesamtdrehimpulsquantenzahl j und der magnetischen Quantenzahl m noch eine symbolische Isotopenspinquantenzahl $t = \pm 1/2$ dazu und bezeichnen die Zustandsfunktion des i -ten Nukleons mit

$$\begin{aligned}\psi_i &= \psi_{n_i, l_i, j_i, m_i, t_i} = \\ &= (\delta_{t_i - 1/2} t^+ + \delta_{t_i - 1/2} t^0) \Psi_{n_i, l_i, j_i, m_i}\end{aligned}$$

Zustandsfunktionen zu verschiedenen Energieeigenwerten (mindestens eine Quantenzahl verschieden) sind orthogonal zueinander. Es ist daher, wenn wir mit q die Gesamtheit aller Koordinaten eines Nukleons bezeichnen

(DIRACSche Schreibweise)

$$\begin{aligned}\langle \psi_{n, l, j, m, t}^* | \psi_{n', l', m', t'} \rangle &= \\ &= \sum \int \psi_{n, l, j, m, t}^*(q) \psi_{n', l', j', m', t'}(q) dq = \\ &= \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{tt'}\end{aligned} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

wofür wir auch kurz

$$= \delta_{n, l, j, m, t; n', l', j', m', t'} \text{ schreiben wollen.}$$

Mit dem Zeichen $\Sigma \int$ sei angedeutet, daß es sich sowohl um eine Integration über r, ϑ, φ als auch um ein inneres Produkt in Spin- und Isotopenspinraum handelt.

Werden dagegen Nucleonen in bestimmten, fest vorgegebenen Energieniveaus betrachtet, so verwenden wir die für die Elektronen der Atomhülle gebräuchliche spektroskopische Bezeichnungsweise: Die Terme werden je nach dem Wert der Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, 2, \dots$ mit den Buchstaben s, p, d, \dots bezeichnet, neben den Buchstaben wird links die Zahl $(n + l + 1)$ geschrieben, rechts unten werden die Zahlen $2j, 2m$ angegeben. Rechts oben soll das Zeichen $+$ oder 0 andeuten, daß es sich um ein Proton, bzw. Neutron handelt. Zur Erläuterung ein Beispiel: Der Energieterm oder auch die Zustandsfunktion eines Protons mit $n = 0, l = 1, j = 3/2, m = -1/2$ wird charakterisiert durch

$$2p_{3,-1}^+,$$

bei einem Neutron mit $n = 0, l = 2, j = 5/2, m = 3/2$ durch

$$3d_{5,3}^0.$$

Der aus n Nucleonen bestehende Kern wird nach dem HARTREE-Verfahren als System von n unabhängigen Partikeln betrachtet, die sich im gemeinsamen Potentialfeld bewegen. Als Teilchen mit halb-

zahligem Spin gehorchen die Nucleonen ebenso wie die Hüllenelektronen dem PAULI-Prinzip, das heißt sie werden durch die FERMI-Statistik beschrieben. Die Zustandsfunktionen des Kerns sind daher SLATER-Determinanten

$$D = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(q_1) & \psi_2(q_1) \dots & \psi_n(q_1) \\ \psi_1(q_2) & \psi_2(q_2) \dots & \psi_n(q_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_1(q_n) & \psi_2(q_n) \dots & \psi_n(q_n) \end{vmatrix} \quad (5)$$

worin wir für $\psi_{n_i, l_i, j_i, m_i, t_i}$ kurz ψ_i geschrieben haben. Im folgenden wird zur Vereinfachung das Symbol

$$D = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$$

verwendet. Durch die Antisymmetrie dieser Zustandsfunktion kommt zum Ausdruck, daß ein und dasselbe Energieniveau nur von einem einzigen Teilchen einer Sorte besetzt sein kann.

Die Differenz der Energieniveaus mit gleichen n - und l -Werten ist klein gegen die der Niveaus mit verschiedenen n - und l -Werten, daher liegt es nahe, Nucleonen mit denselben n - und l -Quantenzahlen zu einer Schale zusammenzufassen. Es gibt also zu jedem Wertepaar n und l eine Protonen- und eine Neutronenschale. Der energetisch tiefste Zustand (Grundzustand) eines Kerns ist daher jener, in dem die Schalen niedrigster Energie möglichst voll besetzt sind. Die Nucleonen einer n - l -Schale werden durch die starke Aufspaltung jedes Niveaus in die zu $j = l + 1/2$ und $j = l - 1/2$ gehörigen Niveaus infolge der Spin-Bahn-Kopplung in zwei Unterschalen getrennt. Die Aufspaltung ist proportional l und so groß, daß die Terme $5g_7$ und $4d_5$ nahe beieinander liegen und die Terme $4f_5$ und $3p_3$ sich in der Reihenfolge vertauschen, im nur einige Beispiele dafür anzuführen [9].

Die in den Einteilchenfunktionen linearen SLATER-Determinanten transformieren sich nach der

$$\mathfrak{D}_{j_1} \times \mathfrak{D}_{j_2} \times \dots \times \mathfrak{D}_{j_i} \dots \times \mathfrak{D}_{j_n}.$$

Um die Tatsache zu erklären, daß gg -Kerne (gerade Protonen- und gerade Neutronenanzahl) im Grundzustand einen Gesamtdrehimpuls $j = 0$ besitzen, dagegen ug - und gu -Kerne im Grundzustand denselben Drehimpuls wie das unpaarige Nucleon besitzen, muß man annehmen, daß je zwei Teilchen einer n - l - j -Schale mit den magnetischen Quantenzahlen m und $-m$ sich nach der \mathfrak{D}_0 transformieren (Hauptargument für das Einzelnucleonen-Modell). Die Nucleonen einer vollen n - l - j -Schale transformieren sich daher nach der \mathfrak{D}_0 , ebenso natürlich die Nucleonen einer vollen n - l -Schale. Der Transformationscharakter der SLATER-Determinante ergibt sich daher aus dem direkten Produkt

$$\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{D}_{j_i} \times \mathfrak{D}_{j_k} \dots = \sum \mathfrak{D}_J,$$

wobei \mathfrak{D}_{j_i} , \mathfrak{D}_{j_k} , die Darstellungen der Drehungsgruppe sind, nach denen sich die unpaarigen Partikeln der nicht vollbesetzten Schalen transformieren. Daraus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für die \mathfrak{D}_J

und damit für den Erwartungswert $J(J+1)$ des Gesamtdrehimpulsoperators $\vec{J}_{op} = \sum \vec{j}_i$. Zur Beschreibung eines Kernniveaus mit bestimmten (experimentell festgestelltem) J können nun alle die SLATER-Determinanten herangezogen werden, die sich nach der \mathfrak{D}_j transformieren.

Weiters ist das Transformationsverhalten der SLATER-Determinanten im Isotopenspin-Raum zu untersuchen. Da die Einteilchenfunktionen Substrate der $\mathfrak{D}_{1/2}$ (Eigenfunktionen von $1/2 \tau_3$ zum Eigenwert $t = +1/2$ für das Proton, $t = -1/2$ für das Neutron) sind, transformieren sich die SLATER-Determinanten nach der

$$\mathfrak{D}_{1/2} \times \mathfrak{D}_{1/2} \times \dots \times \mathfrak{D}_{1/2} = \sum \mathfrak{D}_T.$$

Die Eigenwerte von $T^2 = (\sum \vec{\tau})^2$ haben keine physikalische Bedeutung, dagegen sind die Eigenwerte von $T_z = \sum \tau_3$, die wir M_T nennen wollen, durch die Zahl der Neutronen und Protonen des Kerns bestimmt. Die Ausreduktion der Drehungsgruppe im Isotopenspinraum führt also ebenso wie die im Raum des Gesamtdrehimpulses zu einer Auswahl der zulässigen SLATER-Determinanten: es können nur solche verwendet werden, die sich nach Darstellung \mathfrak{D}_T transformieren, in denen der durch Kernladungszahl und Atomgewicht vorgegebene Wert M_T vorkommen kann.

Das Verfahren zur Aufstellung der Zustandsfunktionen

$$\Phi_{JM} = a_1 D_1 + a_2 D_2 + \dots, \quad (6)$$

die sich nach einer Darstellung \mathfrak{D}_J , aber unter Umständen verschiedenen Darstellungen \mathfrak{D}_T transformieren, ist ausführlicher von A. FLORIAN [18] beschrieben.

Zu beachten ist schließlich noch das Transformationsverhalten der Zustandsfunktionen bezüglich Raumspiegelungen. Zur Beschreibung eines Zustandes gerader (bzw. ungerader) Parität können nur SLATER-Determinanten herangezogen werden, die eine gerade (bzw. ungerade) Anzahl von Einteilchenfunktionen enthalten, die bezüglich einer Raumspiegelung antisymmetrisch sind.

II. Die Operatoren der Kernmomente

Die Operatoren der elektrischen Multipolmomente definieren wir durch

$$Q_{\lambda op}^\mu = \sum_{i=1}^n e \frac{1}{2} (1 + \tau_3^{(i)}) r_i^\lambda P_\lambda^\mu(\vartheta_i, \varphi_i), \quad (7)$$

wobei die Summe über alle n Nucleonen des Kerns zu erstrecken ist [19]. Dann ist das elektrische Quadrupolmoment gegeben durch den Erwartungswert des Operators Q_{2op}^0 im Zustand $J_z = J$

$$Q = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \Phi_{JJ}^* | Q_{2op}^0 | \Phi_{JJ} \rangle. \quad (8)$$

Das magnetische Moment in spektroskopischem Sinn ist der Erwartungswert des Operators [19], [20]

$$\mu_{op} = \frac{1}{(J+1)} (\vec{J} M) \quad (9)$$

im Zustand $J_z = J$,
er enthält die beiden Operatoren

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{l} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \right) \quad (\text{Gesamtdrehimpuls})$$

und

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \left(g_1 \vec{l} + \frac{1}{2} g_s \vec{\sigma} \right) \cdot \mu_0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{magnetisches Moment des Kerns;} \\ \mu_0 = \frac{e \hbar}{2 m c} \text{ Kernmagneton} \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_s = (1 + \tau_3) \mu_p + (1 - \tau_3) \mu_n \\ g_1 = \frac{1}{2} (1 - \tau_3) \end{array} \right\} \text{gyromagnetische Faktoren}$$

$\mu_p \mu_0 = + 2,79255 \mu_0 = \text{magnetisches Moment des Protons}$

$\mu_n \mu_0 = - 1,91280 \mu_0 = \text{magnetisches Moment des Neutrons. [21]}$

III. Berechnung der Kernmomente

Berechnung der *Matrixelemente* eines Operators Ω , der sich nur aus Einteilchen-, bzw. Zweiteilchenoperatoren zusammensetzt.

$$A. \quad \Omega = \sum_{i=1}^n \Omega(q_i)$$

Spezialfälle:

$$1. \quad D_1 \equiv D_2$$

$$\langle D_1^* | \Omega | D_2 \rangle = \sum_{m=1}^n \langle \psi_m^*(q_1) | \Omega(q_1) | \psi_m(q_1) \rangle \quad (10)$$

2. D_1 und D_2 unterscheiden sich in einer Nucleonenfunktion

$$\psi_i^{(1)} \neq \psi_i^{(2)}, \quad \psi_k^{(1)} = \psi_k^{(2)} \quad \text{für} \quad k = 1, 2 \dots n; \quad k \neq i \quad (11)$$

$$\langle D_1^* | \Omega | D_2 \rangle = \langle \psi_i^{(1)*}(q_1) | \Omega(q_1) | \psi_i^{(2)}(q_1) \rangle.$$

3. D_1 und D_2 enthalten zwei oder mehr verschiedene Nucleonenfunktionen

$$\langle D_1^* | \Omega | D_2 \rangle = 0. \quad (12)$$

$$B. \quad \Omega = \sum_{\substack{i, k=1 \\ i < k}}^n \Omega(q_i, q_k) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^n \Omega(q_i, q_k)$$

$$\Omega(q_i, q_k) = \Omega(q_k, q_i).$$

Spezialfälle:

1. $D_1 \equiv D_2$

$$\langle D^* | \Omega | D \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{r, m=1 \\ r \neq m}}^n \langle \psi_r^{(1)*}(q_1) \psi_m^{(1)*}(q_2) | \Omega(q_1, q_2) | \cdot \\ \cdot | \psi_r^{(2)}(q_1) \psi_m^{(2)}(q_2) - \psi_m^{(2)}(q_1) \psi_r^{(2)}(q_2) \rangle. \quad (13)$$

2. D_2 stimmt bis auf eine Nucleonenfunktion mit D_1 überein

$$\psi_i^{(1)} \neq \psi_i^{(2)}, \quad \psi_k^{(1)} = \psi_k^{(2)} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, n \neq i \quad (14)$$

$$\langle D_1^* | \Omega | D_2 \rangle = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n \langle \psi_m^{(1)}(q_1)^* \psi_i^{(1)*}(q_2) | \Omega(q_1, q_2) | \cdot \\ \cdot | \psi_m^{(2)}(q_1) \psi_i^{(2)}(q_2) - \psi_i^{(2)}(q_1) \psi_m^{(2)}(q_2) \rangle.$$

3. D_1 und D_2 unterscheiden sich in zwei Nucleonenfunktionen

$$\psi_i^{(1)} \neq \psi_i^{(2)} \quad \psi_r^{(1)} = \psi_r^{(2)} \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \dots, n \neq i, k \\ \psi_k^{(1)} \neq \psi_k^{(2)} \quad (15)$$

$$\langle D_1^* | \Omega | D_2 \rangle = \langle \psi_i^{(1)*}(q_1) \psi_k^{(1)*}(q_2) | \Omega(q_1, q_2) | \cdot \\ \cdot | \psi_i^{(2)}(q_1) \psi_k^{(2)}(q_2) - \psi_k^{(2)}(q_1) \psi_i^{(2)}(q_2) \rangle.$$

4. D_1 und D_2 enthalten drei oder mehr verschiedene Nucleonenfunktionen.

$$\langle D_1^* | \Omega | D_2 \rangle = 0. \quad (16)$$

A. Elektrische Multipolmomente

Da der Operator

$$Q_{\lambda op}^\mu = \sum_{i=1}^n e g_1 r^\lambda P_\lambda^\mu \quad (17)$$

aus einer Summe von Operatoren besteht, die jeweils nur auf die Zustandsfunktion eines einzigen Partikels wirken, verschwinden bei der Bildung des Erwartungswertes in einem Zustand Φ_{JM} (im folgenden kurz Φ) (6) einige Glieder identisch: In

$$\langle \Phi^* | Q_{\lambda op}^\mu | \Phi \rangle = \langle \sum_r a_r D_r^* | Q_{\lambda op}^\mu | \sum_s a_s D_s \rangle = \\ = \sum_r a_r^2 \langle D_r^* | Q_{\lambda op}^\mu | D_r \rangle + \sum_{\substack{r, s \\ r \neq s}} a_r a_s \langle D_r^* | Q_{\lambda op}^\mu | D_s \rangle \quad (18)$$

sind nach (11) und (12) nur diejenigen Terme der zweiten Summe von Null verschieden, deren SLATER-Determinanten bis auf eine Nucleonenfunktion übereinstimmen, und diese liefern nur je einen nicht verschwindenden Ausdruck, das Matricelement des Einteilchenoperators

für den Übergang zwischen den beiden verschiedenen Einteilchenzuständen

$$\langle D_r^* | Q_{\lambda \rho}^\mu | D_s \rangle = \langle \psi_i^{(r)*} | e g_1 r^\lambda P_\lambda^\mu | \psi_i^{(s)} \rangle$$

wenn $\begin{cases} D_r = \{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_i^{(r)} \dots \psi_n\} \\ D_s = \{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_i^{(s)} \dots \psi_n\} \\ \psi_i^{(r)} \neq \psi_i^{(s)} \end{cases}$

(18 a)

Dagegen ergibt jedes Glied der ersten Summe alle n Erwartungswerte des Operators in den verschiedenen Einteilchenzuständen [vgl. (10)]

$$\langle D_r^* | \sum_{i=1}^n Q_{\lambda \rho}^\mu | D_r \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \psi_i^{(r)*} | e g_1 r^\lambda P_\lambda^\mu | \psi_i^{(r)} \rangle. \quad (18 b)$$

Um die Erwartungswerte des Operators für beliebige Kerne zu berechnen, genügt es also die Matrixelemente

$$\langle \psi^* | e g_1 r^\lambda P_\lambda^\mu | \psi' \rangle \quad (19)$$

aufzustellen.

Über die Quantenzahlen der beiden Nucleonenfunktionen ψ und ψ' in (19) können von vornherein einige Aussagen gemacht werden. Stammen ψ und ψ' aus derselben SLATER-Determinante, so sind die beiden Funktionen identisch (18 b), stammen sie aus verschiedenen SLATER-Determinanten, so sind es nach (18 a) die einzigen voneinander verschiedenen Nucleonenfunktionen, die in den beiden, in allen anderen Nucleonenfunktionen übereinstimmenden Determinanten D_r und D_s enthalten sind.

D_r und D_s müssen gleich viele Protonenfunktionen und gleich viele Neutronenfunktionen enthalten, also müssen die Isotopenspinquantenzahlen von ψ und ψ' gleich sein

$$t = t'. \quad (20)$$

Außerdem sind die beiden SLATER-Determinanten Eigenfunktionen des Operators J_z zum selben Eigenwert M , der durch die Summe der m -Quantenzahlen der n Nucleonenfunktionen gegeben ist, weshalb

$$\sum_{i=1}^n m_i^{(r)} = \sum_{i=1}^n m_i^{(s)}$$

sein muß. Daraus ergibt sich

$$m = m'. \quad (21)$$

Auch eine Bedingung für die Drehimpulsquantenzahlen von ψ und ψ' kann ganz allgemein abgeleitet werden: Die zur selben Zustandsfunktion Φ_{JM} gehörigen SLATER-Determinanten müssen gleiche Parität besitzen, es muß

$$(-1)^{\Sigma l_i^{(r)}} = (-1)^{\Sigma l_i^{(s)}}$$

sein, also $(-1)^l = (-1)^{l'}$, oder

$$l + l' \equiv 0 \quad (2) \quad l - l' \equiv 0 \quad (2). \quad (22)$$

Aus der Form des Operators und der Gestalt der Nucleonenfunktionen

$$\psi_{n, l, j, m, t} = (\delta_{t, 1/2} t^+ + \delta_{t, -1/2} t^0) f_{nl}(r) Q_{jm}^{\pm}(\vartheta, \varphi) \quad \text{mit} \quad (2), (3), (4) \quad (23)$$

geht hervor, daß die Matrixelemente in einen radialen Beitrag, einen vom Isotopenspin herrührenden Faktor und einen Winkel- und Spinanteil zerlegt werden können:

$$\langle \psi_{n, l, j, m, t}^*(r, \vartheta, \varphi) | Q_{\lambda \sigma p}^{\mu} | \psi_{n', l', j', m', t'} \rangle = q(\tau) q(r) q(\sigma, \vartheta, \varphi); \quad (24)$$

$$q(\tau) = e(\delta_{t, 1/2} t^+ + \delta_{t, -1/2} t^0) g_1 \cdot (\delta_{t', 1/2} t^+ + \delta_{t', -1/2} t^0); \quad (25)$$

$$q(r) = \int f_{nl}(r) r^{\lambda} f_{n' l'}(r) r^2 dr; \quad (26)$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \int (Q_{j, m}^{\pm})^* P_{\lambda}^{\mu} Q_{j', m'}^{\pm} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (27)$$

Der vom Isotopenspin erzeugte Faktor $q(\tau)$ ist

$$q(\tau) = e(\delta_{t, 1/2} t^+ + \delta_{t, -1/2} t^0) \delta_{t, 1/2} t^+ = e \delta_{t, 1/2}. \quad (28)$$

Berechnung des Winkelfunktions-Anteils

Werden in (27) die Funktionen Q_{jm}^{\pm} aus (2) und (3) eingesetzt, und die Produkte im Spinraum ausgeführt, so fallen einige Glieder wegen der Orthogonalität der Einheitsvektoren v_+ und v_- weg.

$$\left\{ \begin{aligned} q(\sigma, \vartheta, \varphi) &= \int (Q_{j, m}^{\pm})^* P_{\lambda}^{\mu} Q_{j', m'}^{\pm} d\omega = \\ &= \int a_1 (P_l^{m-1/2})^* P_{\lambda}^{\mu} P_{l'}^{m'-1/2} + \\ &+ a_2 (P_l^{m+1/2})^* P_{\lambda}^{\mu} P_{l'}^{m'+1/2} d\omega. \end{aligned} \right. \quad (d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi) \quad (29)$$

Für das Produkt $P_{\lambda}^{\mu} P_{l'}^{m' \pm 1/2}$ gilt die Zerlegung

$$P_l^m P_{l'}^{m'} = \sum_{\substack{L=l+l' \\ L-l'-l \equiv 0 \pmod{2}}} A_{ll'L}^{mm'} P_L^{m+m'} \quad (30)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{ll'L}^{mm'} &= \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)}} \cdot \frac{l! l'!}{L!(l+l'-L)!} \sum_{\tau} (-1)^{\tau} \binom{L}{l-\tau} \cdot \\ &\cdot \binom{L}{l'-\tau} \binom{l+l'-L}{\tau} \cdot \frac{1}{\binom{2L}{L+l-l'} \binom{L+l+l'-1}{l+l'-L}} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \\ &\cdot \frac{\sqrt{(l+m)! (l-m)! (l'+m')! (l'-m')! (L+M)! (L-M)!}}{(l-m-\nu)! (L+l-m-\nu)! (l'+m'-\nu)! (L-m'-l+\nu)! \nu! (l+l'-L-\nu)!} \end{aligned}$$

Das ist die „CLEBSCH-GORDANSche Reihe“, die gruppentheoretisch leicht herzuleiten ist.

Wegen der Orthogonalität der Kugelfunktionen ergeben sich durch Einsetzen der Reihe

$$P_{\lambda}^{\mu} P_{l'}^{m \pm 1/2} = \sum_{\substack{L = \text{Max}(|\mu + m \pm 1/2|, |l' - \lambda|) \\ L - l' - \lambda \equiv 0(2)}}^{l' + \lambda} A_{\lambda l' L}^{\mu m \pm 1/2} \cdot P_L^{\mu + m \pm 1/2},$$

welche als Spezialfall von (30) gefunden wird, in (29) nur von Null verschiedene Glieder, wenn $m - 1/2 = \mu + m - 1/2$ oder $m + 1/2 = \mu + m + 1/2$, also

$$\mu = 0 \quad \text{und} \quad L = l \quad (31)$$

ist. l muß also die nach (30) für L geltenden Ungleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} l &\leq l' - \lambda \\ l &\geq |l' - \lambda| \\ l - l' - \lambda &\equiv 0(2). \end{aligned} \quad (32)$$

Fassen wir nach demselben Verfahren $(P_l^{m \pm 1/2})^*$ und $P_{\lambda}^{\mu} = (P_{\lambda}^{-\mu})^*$ zusammen, so verschwindet $q(\sigma, \vartheta, \varphi)$ nur dann nicht, wenn

$$\mu = 0 \quad \text{und} \quad l' = L' \quad (33)$$

ist. Daraus folgt für l' :

$$\begin{aligned} l' &\leq l + \lambda \\ l' &\geq |l - \lambda|. \end{aligned} \quad (34)$$

Ein wichtiger Schluß kann aus (32) gezogen werden, wenn man (22) berücksichtigt: Es muß

$$\lambda \equiv 0(2) \quad (35)$$

sein, das heißt es können nur Momente von elektrischen Multipolen gerader Ordnung auftreten.

Bei der Berechnung von (29) ergeben sich für die Einstellmöglichkeiten des Spins parallel oder antiparallel zum Bahndrehimpuls in ψ und ψ' die vier verschiedenen Fälle:

$$1. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$\begin{aligned} q(\sigma, \vartheta, \varphi) &= \int \left(\left| \frac{(j + m)(j' + m)}{2j \cdot 2j'} P_l^{m-1/2} \sum_L A_{\lambda l' L}^{0m-1/2} P_L^{\mu+m-1/2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{(j-m)(j'-m)}{2j \cdot 2j'} P_l^{m+1/2} \sum_L A_{\lambda l' L}^{0m+1/2} P_L^{\mu+m+1/2} \right| \right) d\omega \\ &= \delta_{\mu 0} \left(\left| \frac{(j+m)(j'+m)}{2j \cdot 2j'} A_{\lambda l' l}^{0m-1/2} \right| \left| \frac{(j-m)(j'-m)}{2j \cdot 2j'} A_{\lambda l' l}^{0m+1/2} \right| \right) \end{aligned} \quad (36)$$

$$2. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$\begin{aligned} q(\sigma, \vartheta, \varphi) &= \delta_{\mu 0} \left(\left| \frac{(j+m)(j'-m+1)}{2j \cdot 2(j'+1)} A_{\lambda l' l}^{0m-1/2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{(j-m)(j'+m+1)}{2j \cdot 2(j'+1)} A_{\lambda l' l}^{0m+1/2} \right| \right) \end{aligned}$$

$$3. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \delta_{\mu 0} \left(- \sqrt{\frac{(j-m+1)(j'+m)}{2(j+1)2j'}} A_{\lambda l' l}^{0 m - 1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{(j+m+1)(j'-m)}{2(j+1)2j'}} A_{\lambda l' l}^{0 m + 1/2} \right) \quad (36)$$

$$4. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \delta_{\mu 0} \left(\sqrt{\frac{(j-m+1)(j'-m+1)}{2(j+1)2(j'+1)}} A_{\lambda l' l}^{0 m - 1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{(j+m+1)(j'+m+1)}{2(j+1)(2j'+2)}} A_{\lambda l' l}^{0 m + 1/2} \right).$$

Spezialfälle:

$$1. \quad \lambda = 0$$

Zufolge (32) [oder auch (34)] muß $l' = l$ sein. Mit

$$A_{0 l l}^{0 m \pm 1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\text{ergibt sich } q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{j j'}$$

$$2. \quad \lambda = 2 \quad (\mu = 0), \text{ Quadrupolmoment}$$

Aus (33) und (34) geht hervor, daß l' bei gegebenem l höchstens die drei Werte

$$l' = l + 2, l, l - 2$$

annehmen kann; in gewissen Fällen ($l = 0, 1$) werden durch die Bedingung $l' \geq |l - 2|$ noch eine oder zwei dieser Möglichkeiten ausgeschlossen. Die folgende Tabelle zeigt sämtliche Werte von $q(\sigma, \vartheta, \varphi)$ für alle Kombinationen von l, l', j und j' .

$$a) \quad l' = l + 2$$

$$A_{2, l+2, l}^{0 m \pm 1/2} = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{3}{4 \sqrt{(2l+1)(2l+5)(2l+3)}} \cdot \sqrt{(l+m+2 \pm 1/2)(l+m+1 \mp 1/2)(l-m+2 \pm 1/2)(l-m+1 \pm 1/2)}$$

$$1. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{(l+m+5/2)(l+m+3/2)(l-m+5/2)(l-m+3/2)}{(2l+3)(2l+5)}}$$

$$2. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = - \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{m \sqrt{(l+m+3/2)(l-m+3/2)}}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}}$$

$$3. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = 0$$

$$4. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{3 \sqrt{(l+m+3/2)(l+m+1/2)(l-m+3/2)(l-m+1/2)}}{4(2l+1)(2l+3)}$$

$$b) \quad l' = l$$

$$A_{2, l, l}^{0, m \mp 1/2} = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{(l+3/2)(l-1/2) - 3m^2 \pm 3m}{2(2l-1)(2l+3)}$$

$$1. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{(l+3/2)(l+1/2) - 3m^2}{2(2l+1)(2l+3)}$$

$$2. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{-3m \sqrt{(l+m+1/2)(l-m+1/2)}}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)}$$

$$3. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{-3m \sqrt{(l+m+1/2)(l-m+1/2)}}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)}$$

$$4. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{(l+1/2)(l-1/2) - 3m^2}{2(2l-1)(2l+1)}$$

$$c) \quad l' = l - 2$$

$$A_{2, l-2, l}^{0, m \mp 1/2} = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{3}{4 \sqrt{(2l-3)(2l+1)(2l-1)}}$$

$$\sqrt{(l+m \mp 1/2)(l+m-1 \mp 1/2)(l-m \pm 1/2)(l-m-1 \pm 1/2)}$$

$$1. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{3 \sqrt{(l+m+1/2)(l+m-1/2)(l-m+1/2)(l-m-1/2)}}{4(2l-1)(2l+1)}$$

$$2. \quad j = l + 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = 0$$

$$3. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' + 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = - \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{3m \sqrt{(l+m-1/2)(l-m-1/2)}}{(2l-3)(2l-1)(2l+1)}$$

$$4. \quad j = l - 1/2, \quad j' = l' - 1/2$$

$$q(\sigma, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{3 \sqrt{(l+m-1/2)(l+m-3/2)(l-m-1/2)(l-m-3/2)}}{4(2l-3)(2l-1)}$$

Berechnung des Radialteiles

Wir gehen zunächst auf die LAGUERRE-Polynome zurück; wir setzen

$$f_{nl}(r) = a^{\frac{2l+3}{4}} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}} e^{-\frac{a}{2}r^2} r^l L_n^{(l+1/2)}(ar^2)$$

in $q(r)$ ein

$$\begin{aligned} q(r) &= \int_0^\infty f_{nl}(r) r^{\lambda+2} f_{n'l'}(r) dr = \\ &= 2a^{\frac{l+l'+3}{2}} \sqrt{\frac{n!n'!}{\Gamma(n+l+3/2)\Gamma(n'+l'+3/2)}} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-ar^2} r^{l+l'+\lambda+2} L_n^{(l+1/2)}(ar^2) L_{n'}^{(l'+1/2)}(ar^2) dr \end{aligned}$$

und substituieren $ar^2 = x$; damit wird

$$\begin{aligned} q(r) &= a^{-\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{n!n'!}{\Gamma(n+l+3/2)\Gamma(n'+l'+3/2)}} \cdot \\ &\quad \cdot e^{-x} x^{\frac{l+l'+\lambda+1}{2}} L_n^{(l+1/2)}(x) L_{n'}^{(l'+1/2)}(x) dx. \end{aligned} \quad (37)$$

Zur expliziten Berechnung dieses Integrals setzen wir für $L_{n'}^{(l'+1/2)}(x)$ die Potenzreihe ein

$$\begin{aligned} q(r) &= a^{-\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{n!n'!}{\Gamma(n+l+3/2)\Gamma(n'+l'+3/2)}} \sum_{s=0}^{n'} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \\ &\quad \cdot \binom{n'+l'+1/2}{n'-s} \int_0^\infty e^{-x} x^{l+1/2} L_n^{(l+1/2)}(x) x^{\frac{l'-l+\lambda}{2}+s} dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Es gilt für

$$\begin{aligned} I(n, k; r) &= \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^{(k)}(x) x^r dx = \quad r \geq 0, \text{ ganzzahlig} \\ &= (-1)^n \binom{r}{n} \Gamma(r-k+1) = \\ &= (-1)^n \binom{r}{n} (K+r)(k+r-1) \dots (k+1)k \Gamma(k) \quad n, r = 0, 1, 2, \dots \\ &I(n, k; r) = 0 \quad \text{für} \quad r < n. \end{aligned} \quad (39)$$

Werden für die in (38) enthaltenen Summanden die entsprechenden Ausdrücke (39) eingesetzt

$$\begin{aligned} q(r) &= a^{-\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{n!n'!}{\Gamma(n+l+3/2)\Gamma(n'+l'+3/2)}} (-1)^n \sum_{s=0}^{n'} \cdot \\ &\quad \cdot \binom{n'+l'+1/2}{n'-s} \frac{(-1)^s}{s!} \binom{S+s}{n} \Gamma(S+s+l+3/2), \end{aligned} \quad (40)$$

mit

$$S = \frac{l' - l + \lambda}{2} \geq 0, \quad \text{ganz} \quad (41 \text{ a})$$

so ist aus der oberen Grenze der Summe über s und dem Binomialkoeffizienten die Auswahlregel

$$n' + \frac{l' - l + \lambda}{2} \geq n \quad (42)$$

direkt zu entnehmen.

Wegen der Symmetrie von (38) in n und n' , l und l' gilt ebenso

$$S' = \frac{l - l' + \lambda}{2} \geq 0, \quad \text{ganz} \quad (41 \text{ b})$$

und

$$n + \frac{l - l' + \lambda}{2} \geq n'. \quad (43)$$

Aus (42) folgt damit die Auswahlregel für n und n' , die wegen (41) für alle Werte $n = 0, 1, 2, \dots, n' = 0, 1, 2, \dots$ gilt:

$$n - \frac{l - l' - \lambda}{2} \leq n' \leq n + \frac{l - l' + \lambda}{2}. \quad (44)$$

Spezialfälle:

$$1. \quad \lambda = 0$$

Die Auswahlregeln (32) [oder auch (34)] zeigen, daß $l' = l$ sein muß, damit wird nach (41) $S = 0$, $S' = 0$; unter dieser Voraussetzung folgt aus (44) $n \leq n' \leq n$, also $n' = n$. In (40) reduziert sich die Summe über s auf das einzige Glied $s = n$, da alle anderen Glieder Binomial-

koeffizienten $\binom{s}{n}$ mit $s < n$ enthalten, die definitionsgemäß Null sind,

es wird

$$q^{(r)} = 1.$$

$$2. \quad \lambda = 2 \text{ (elektrisches Quadrupolmoment)}$$

Die erste der Formeln (32) und die erste der Formeln (34) liefern als mögliche Werte für l'

$$l + 2 \geq l' \geq l - 2 \quad l' = l + 2, l, l - 2,$$

die zweite Formel (34) bewirkt aber eine Einschränkung dieser Möglichkeiten, falls $l < 2$ ist. Die folgende Tabelle bringt die für verschiedene Werte von l möglichen Werte von l' und die nach (41) zugehörigen Zahlen S und S' :

	$l \geq 0$	$l \geq 1$	$l \geq 2$
$l' =$	$l + 2$	l	$l - 2$
$S =$	2	1	0
$S' =$	0	1	2

$$a) \quad l' = l + 2$$

(44) lautet in diesem Fall $n - 2 \leq n' \leq n$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{\cdot} \cdot (-1)^{n'+n} \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{n'!} \left(\frac{(n+l+1/2)(n+l-1/2)}{2(n-n'-2)!} - \frac{(n+l+1/2)(n+l+3/2)}{(n-n'-1)!} + \frac{(n+l+5/2)(n+l+3/2)}{(n-n')!} \right). \quad (45)$$

(Glieder mit $a!$ ($a < 0$) sind wegzulassen, bzw. gleich Null zu setzen!)
Die drei möglichen Resultate sind:

$$n' = n - 2$$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{n(n-1)} \quad (46 a)$$

$$n' = n - 1$$

$$q(r) = -a^{-1} 2 \sqrt{n(n+l+3/2)} \quad (46 b)$$

$$n' = n$$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{(n+l+5/2)(n+l+3/2)} \quad (46 c)$$

$$b) \quad l' = l$$

Wegen (44) gilt $n - 1 \leq n' \leq n + 1$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{\cdot} \cdot (-1)^{n+n'} \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{n'!} \left(\frac{(n+l-1/2)(n-1)}{2(n-n'-1)!} - \frac{(n+l+1/2)n}{(n-n')!} + \frac{(n+l+3/2)(n+1)}{(n-n'+1)!} \right). \quad (47)$$

Für die drei möglichen Kombinationen von n und n' nimmt $q(r)$ die folgenden Werte an:

$$n' = n - 1$$

$$q(r) = -a^{-1} \sqrt{n(n+l+1/2)} \quad (48 a)$$

$$n' = n$$

$$q(r) = a^{-1} (2n+l+3/2) \quad (48 b)$$

$$n' = n + 1$$

$$q(r) = -a^{-1} \sqrt{(n+1)(n+l+3/2)} \quad (48 c)$$

$$c) \quad l' = l - 2$$

Es ist $n \leq n' \leq n + 2$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{\cdot} \cdot (-1)^{n+n'} \frac{\Gamma(n+l+3/2)}{n'!} \left(-\frac{n(n-1)}{2(n-n')!} - \frac{(n+1)n}{2(n-n'+1)!} + \frac{(n+2)(n+1)}{(n-n'+2)!} \right) \quad (49)$$

Daraus ergeben sich die Werte von $q(r)$ für die verschiedenen $n - n'$ -Kombinationen:

$$n' = n$$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{(n+l+1/2)(n+l-1/2)} \quad (50 a)$$

$$n' = n + 1$$

$$q(r) = -2 a^{-1} \sqrt{(n+1)(n+1)(n+l+1/2)} \quad (50 b)$$

$$n' = n + 2$$

$$q(r) = a^{-1} \sqrt{(n+1)(n+2)}. \quad (50\ c)$$

Das elektrische Multipolmoment einer Protonenschale

Enthält ein Kern eine vollbesetzte Protonenschale, so ist es zweckmäßig, in den Ausdrücken der Form (18), die bei der Berechnung des Erwartungswertes von $Q_{\lambda\sigma}^{\mu}$ (18) auftreten, zunächst die Teilsumme über die Erwartungswerte des Einteilchenoperators in den Protonenzuständen der betreffenden Schale auszuführen.

Wir summieren zunächst die Beiträge aller Protonen mit gleichen n, l, j und positivem (bzw. negativem) m ,

$$1. \quad t = 1/2, \quad n, l, j = l + 1/2 \quad \text{fest}, \quad m > 0$$

$$\sum_{m=1/2}^j \langle \psi^* | Q_{\lambda\sigma}^{\mu} | \psi \rangle = e q(r) \frac{(2j+1)(2l+1)}{4j \sqrt{4\pi}} \delta_{\lambda,0} \delta_{\mu,0}. \quad (51)$$

$$2. \quad t = 1/2, \quad n, l, j = 1/2 \quad \text{fest}, \quad m < 0$$

$$\sum_{m=-1/2}^{-j} \langle \psi^* | Q_{\lambda\sigma}^{\mu} | \psi \rangle = e q(r) \frac{(2j+1)(2l+1)}{4j \sqrt{4\pi}} \delta_{\lambda,0} \delta_{\mu,0}.$$

$$3. \quad t = 1/2, \quad n, l, j = l - 1/2 \quad \text{fest}, \quad m > 0$$

$$\sum_{m=1/2}^j \langle \psi^* | Q_{\lambda\sigma}^{\mu} | \psi \rangle = e q(r) \frac{(2j+1)(2l+1)}{4(j+1) \sqrt{4\pi}} \delta_{\lambda,0} \delta_{\mu,0}. \quad (52)$$

$$4. \quad t = 1/2, \quad n, l, j = l - 1/2 \quad \text{fest}, \quad m < 0$$

$$\sum_{m=-j}^{-1/2} \langle \psi^* | Q_{\lambda\sigma}^{\mu} | \psi \rangle = e q(r) \frac{(2j+1)(2l+1)}{4(j+1) \sqrt{4\pi}} \delta_{\lambda,0} \delta_{\mu,0}.$$

Aus den Formeln (51) und (52) ist folgende wichtige Tatsache abzulesen: Die Gesamtheit aller Protonen jeder $n-l-j$ -Schale mit positiver (bzw. negativer) magnetischer Quantenzahl m liefert keinen Beitrag zum elektrischen Multipolmoment, wenn man vom trivialen Fall $\lambda = 0, \mu = 0$ absieht. Damit verschwindet auch jeder Beitrag der vollen Schalen.

B. Magnetische Momente

Da die Einteilchenfunktionen Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulsoperators $\vec{j} - \vec{l} - 1/2$ sind, kann der Erwartungswert für das magnetische Moment nur berechnet werden, wenn im Operator \vec{M} der Bahndrehimpuls \vec{l} durch den Gesamtdrehimpuls ersetzt wird

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \left(g_l \vec{j} + \frac{1}{2} (g_s - g_l) \vec{\sigma} \right) \mu_0. \quad (53)$$

Wird dieser Operator in (9) eingesetzt, so zeigt sich, daß der Operator des magnetischen Moments im spektroskopischen Sinn einerseits eine Summe von Operatoren enthält, die nur auf die Koordinaten eines Nucleons wirken, andererseits Operatoren enthält, die auf die Koordinaten zweier Partikel wirken.

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_{op} &= \frac{1}{(J+1)} \left[\sum_{i=1}^n \left(g_i \vec{j}_i^2 + \frac{1}{2} (g_s - g_l) (\vec{j}_i \vec{\sigma}_i) \right) + \right. \\ &+ \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^n \left(g_l^{(i)} (\vec{j}_k \vec{j}_i) + \frac{1}{2} (g_s^{(i)} - g_l^{(i)}) (\vec{j}_k \vec{\sigma}_i) \right) \Big] \mu_0 = \\ &= \frac{1}{(J+1)} \left[\sum_{i=1}^n \mu_{op}^i + \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^n \mu_{op}^{ik} \right] \mu_0\end{aligned}\quad (54)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}g_l^{(i)} \vec{j}_i^2 + \frac{1}{2} (g_s^{(i)} - g_l^{(i)}) (\vec{j}_i \vec{\sigma}_i) &= \mu_{op}^i \\ \left[g_l^{(i)} (\vec{j}_k \vec{j}_i) + \frac{1}{2} (g_s^{(i)} - g_l^{(i)}) (\vec{j}_k \vec{\sigma}_i) \right] &= \mu_{op}^{ik}.\end{aligned}$$

Für die Erwartungswerte der Operatoren der ersten Summe gilt das auf Seite 104 Gesagte, es sind also nur Matrixelemente der Form

$$\langle \psi^* | \mu_{op}^i | \psi' \rangle \quad (55)$$

auszurechnen, wobei für die Quantenzahlen t, m, l in ψ und ψ' wieder die Auswahlregeln (20), (21) und (22) gelten. Die Erwartungswerte der Operatoren μ_{op}^{ik} sind folgendermaßen zu berechnen:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i, k \\ i \neq k}} \langle \Phi^* | \mu_{op}^{ik} | \Phi \rangle &= \sum_{r, s} \sum_{i \neq k} \langle a_r D_r^* | \mu_{op}^{ik} | a_s D_s \rangle = \\ &= \sum_r \sum_{i \neq k} a_r^2 \langle D_r^* | \mu_{op}^{ik} | D_r \rangle + \sum_{r \neq s} \sum_{i \neq k} \langle a_r D_r^* | \mu_{op}^{ik} | a_s D_s \rangle.\end{aligned}\quad (56)$$

Die Summanden des ersten Ausdruckes in (56) ergeben nach (13)

$$\begin{aligned}\langle D_r^* | \sum_{i \neq k} \mu_{op}^{ik} | D_r \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{l, m=1 \\ l \neq m}}^n \langle \psi_l^*(q_1) \psi_m^*(q_2) | \mu_{op}^{12} + \\ &+ \mu_{op}^{21} | \psi_l(q_1) \psi_m(q_2) - \psi_m(q_1) \psi_l(q_2) \rangle.\end{aligned}\quad (57)$$

Die Glieder der zweiten Summe in (56) sind nach (14) und (15) nur von Null verschieden, wenn sich D_r und D_s in höchstens zwei Nucleonenfunktionen unterschieden und liefern entweder

$$\langle D_r^* \left| \sum_{i \neq k} \mu_{op}^{i k} \right| D_s \rangle = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^n \langle \psi_m^{*(r)}(q_1) \psi_l^{*(r)}(q_2) | \mu_{op}^{1 2} + \mu_{op}^{2 1} |$$

$$\cdot | \psi_m^{(s)}(q_1) \psi_l^{(s)}(q_2) - \psi_l^{(s)}(q_1) \psi_m^{(s)}(q_2) \rangle \quad (58)$$

für $D_r = \{ \psi_1, \psi_2 \dots \psi_m^{(r)} \dots \psi_n \}$

$$D_s = \{ \psi_1, \psi_2 \dots \psi_m^{(s)} \dots \psi_n \} \quad (\psi_m^{(r)} \neq \psi_m^{(s)})$$

oder

$$\langle D_r^* \left| \sum_{i \neq k} \mu_{op}^{i k} \right| D_s \rangle =$$

$$= \langle \psi_l^{*(r)}(q_1) \psi_m^{*(r)}(q_2) | \mu_{op}^{1 2} + \mu_{op}^{2 1} |$$

$$| \psi_l^{(s)}(q_1) \psi_m^{(s)}(q_2) - \psi_m^{(s)}(q_1) \psi_l^{(s)}(q_2) \rangle \quad (59)$$

$$D_r = \{ \psi_1, \dots \psi_l^{(r)} \dots \psi_m^{(r)} \dots \psi_n \}$$

für

$$D_s = \{ \psi_1, \dots \psi_l^{(s)} \dots \psi_m^{(s)} \dots \psi_n \}$$

$$\psi_l^{(r)} \neq \psi_l^{(s)}, \psi_m^{(r)} \neq \psi_m^{(s)},$$

setzen sich also immer aus Ausdrücken der Form

$$\langle \psi^*(q_1) \psi'^*(q_2) | \mu_{op}^{1 2} + \mu_{op}^{2 1} | \psi''(q_1) \psi'''(q_2) - \psi'''(q_1) \psi''(q_2) \rangle \quad (60)$$

zusammen.

Nun zur Berechnung der Matrixelemente (55):

Wir verwenden $\vec{j} \sigma = j^2 - l^2 + 3/4$, um nur mit Operatoren zu arbeiten, die die Nucleonenfunktionen in sich transformieren, dann wird

$$\langle \psi^* \left| \mu_{op}^{i k} \right| \psi' \rangle = \langle \psi^* \left| \vec{\mu} \cdot \vec{j}^2 - \frac{1}{2} (\xi_s - \xi_l) \left(\vec{j}^2 - l^2 + \frac{3}{4} \right) \right| \psi' \rangle = \quad (61)$$

$$= \left[\delta_{l, 1/2} j(j+1) + \left\{ \delta_{l, 1/2} (\mu_p - 1/2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. - \delta_{l, -1/2} \mu_n \right\} \left(j(j-1) - l(l-1) - \frac{3}{4} \right) \right] \langle \psi^* \psi' \rangle.$$

Wegen der Orthogonalität der Nucleonenfunktionen ist (61) nur von Null verschieden, wenn $\psi = \psi'$ ist, es treten daher nach (10) nur die Matrixelemente der Einteilchenoperatoren in den durch eine SLATER-Determinante beschriebenen Zuständen auf, während die nach (11) an sich möglichen Übergangselemente für zwei durch verschiedene SLATER-Determinanten beschriebene Zustände identisch verschwinden. Der Erwartungswert für die Operatoren μ_{op}^i reduziert sich daher auf folgende

Summe:

$$\langle \Phi^* \left| \sum_{i=1}^n \mu_{op}^i \right| \Phi \rangle = \sum_r a_r^2 \langle D_r^* \left| \sum_{i=1}^n \mu_{op}^i \right| D_r \rangle =$$

$$= \sum_r a_r^2 \sum_{l=1}^n \langle \psi_l^{*(r)}(q_1) | \mu_{op}^1 | \psi_l^{(r)}(q_1) \rangle. \quad (62)$$

Die einzelnen Summanden, deren Werte in (61) berechnet wurden, können noch in etwas kürzerer Form angeschrieben werden, wenn man die beiden Fälle Spin parallel, bzw. Spin antiparallel zum Bahndrehimpuls trennt:

$$1. \quad j = l + 1/2$$

$$\langle \psi^* | \mu_{op}^1 | \psi \rangle = (l + 3/2) [\delta_{t, 1/2} + (\mu_p \delta_{t, 1/2} + \mu_n \delta_{t-1/2})] \quad (63)$$

$$2. \quad j = l - 1/2$$

$$\langle \psi^* | \mu_{op}^1 | \psi \rangle = (l - 1/2) [(l + 1) \delta_{t, 1/2} - (\mu_p \delta_{t, 1/2} + \mu_n \delta_{t-1/2})] \quad (64)$$

Zur Berechnung des Matrixelementes (60) werden zweckmäßig folgende Komponenten des Drehimpulsvektors verwendet:

$$j_p = j_1 + i j_2, \quad j_q = j_1 - i j_2, \quad j_z = j_3. \quad (65)$$

Die Wirkung dieser Größen auf die Nucleonenfunktionen ist gruppentheoretisch berechnet [22]:

$$\begin{cases} j_p \psi_{jm} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \cdot \psi_{j, m+1} \\ j_q \psi_{jm} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \cdot \psi_{j, m-1} \\ j_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} \\ j^2 \psi_{jm} = j(j+1) \psi_{jm} \end{cases}$$

Wir zerlegen den Operator in einen spinunabhängigen und einen spinabhängigen Teil

$$\begin{aligned} \mu^{1,2}_{op} + \mu^{2,1}_{op} &= (g_l^{(1)} + g_l^{(2)}) \vec{j}_1 \vec{j}_2 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} (g_s^{(1)} - g_l^{(1)}) \vec{j}_2 \sigma_1 + \frac{1}{2} (g_s^{(2)} - g_l^{(2)}) \vec{j}_1 \sigma_2 \right] \end{aligned} \quad (66)$$

und berechnen den Erwartungswert des ersten Teiles:

$$\begin{aligned} &\langle \psi_{jm}^* \psi_{j'm'}^* | (g_l^{(1)} + g_l^{(2)}) \vec{j}_1 \vec{j}_2 | \psi_{j''m''} \psi_{j'''m'''} - \psi_{j'''m'''} \psi_{j''m''} \rangle = \\ &= [\delta_{t, 1/2} + \delta_{t', 1/2}] \left[\delta_{n, l, j, t; n'', l'', j'', t''} \cdot \delta_{n', l', j', t'; n''', l''', j''', t'''} \cdot \right. \\ &\cdot \left(\frac{1}{2} \delta_{m, m''+1} \delta_{m', m'''-1} \sqrt{(j+m)(j-m+1)(j'-m')(j'+m'+1)} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{m, m''-1} \delta_{m', m''' + 1} \sqrt{(j-m)(j+m+1)(j'+m')(j'-m'+1)} + \\ &\left. \left. + \delta_{m, m''} \delta_{m', m''' mm'} \right) - \delta_{n, l, j, t; n'', l'', j'', t''} \cdot \delta_{n', l', j', t'; n''', l''', j''', t'''} \cdot \right. \\ &\cdot \left(\frac{1}{2} \delta_{m, m''' + 1} \delta_{m', m''-1} \sqrt{(j+m)(j-m+1)(j'-m')(j'+m'+1)} + \right. \\ &+ \delta_{m, m'''-1} \delta_{m', m'' + 1} \sqrt{(j-m)(j+m+1)(j'+m')(j'-m'+1)} + \\ &\left. \left. + \delta_{m, m'''} \delta_{m', m'' mm'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Eine zu (65) analoge Zerlegung der Spinoperatoren (Drehimpulsoperatoren in einem zweidimensionalen Darstellungsraum der Drehungsgruppe), ihre Anwendung auf den winkel- und spinabhängigen Teil der Nucleonenfunktionen und die Trennung der inneren Produkte im Koordinatenraum des ersten und des zweiten Partikels erleichtern die Berechnung des spinabhängigen Teils des Operators (66).

Um nicht die Übersicht zu verlieren, nehmen wir vorerst nur den letzten Term und auch nur die erste Kombination der Nucleonenfunktionen aus (60). Der vollständige Ausdruck ist dann durch bloße Vertauschung der Koordinaten zu konstruieren.

$$\begin{aligned}
 \langle \psi^* \psi'^* | (g_s^{(2)} - g_l^{(2)}) \frac{1}{2} \vec{j}_1 \vec{\sigma}_2 | \psi'' \psi''' \rangle &= \left[\delta_{l''', 1/2} (2\mu_p - 1) + 2\mu_n \delta_{l''' - 1/2} \right] \cdot \\
 &\cdot \left[\frac{1}{2} \langle \psi^* | j_p | \psi'' \rangle \langle \psi'^* | \frac{1}{2} \sigma_p | \psi''' \rangle + \frac{1}{2} \langle \psi^* | j_q | \psi'' \rangle \langle \psi'^* | \frac{1}{2} \sigma_p | \psi''' \rangle + \right. \\
 &\cdot \left. \langle \psi^* | j_z | \psi'' \rangle \langle \psi'^* | \frac{1}{2} \sigma_z | \psi''' \rangle \right] = \delta_{l, n, l, j, \quad l'', n'', l'', j'' \cdot \delta_{l', n', l', \quad l''', n''', l'''} \cdot \\
 &\cdot \left[(\mu_p - 1/2) \delta_{l', 1/2} + \mu_n \delta_{l', -1/2} \right] \cdot \\
 &\cdot \frac{1}{2l' + 1} \left[\delta_{m, m'' + 1} \delta_{m', m''' - 1} \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} \{ \delta_{j', j'''} 2(j' - l') \cdot \right. \\
 &\cdot \sqrt{(j' - m')(j' + m' + 1)} + \delta_{j', j''' - 1} \sqrt{(j' + m' + 1)(j' + m' + 2)} - \\
 &\quad \left. - \delta_{j', j''' + 1} \sqrt{(j' - m')(j' - m' - 1)} \} + \right. \\
 &\quad + \delta_{m, m'' - 1} \delta_{m', m''' + 1} \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} \{ \delta_{j', j'''} 2(j' - l') \cdot \\
 &\cdot \sqrt{(j' + m')(j' - m' + 1)} - \delta_{j', j''' - 1} \sqrt{(j' - m' + 1)(j' - m' + 2)} + \\
 &\quad + \delta_{j', j''' + 1} \sqrt{(j' + m')(j' + m' - 1)} \} + \\
 &\quad + 2 \delta_{m, m''} \delta_{m', m'''} m \{ \delta_{j', j'''} m' \cdot 2(j' - l') - \\
 &\quad \left. - (\delta_{j', j''' - 1} + \delta_{j', j''' + 1}) \sqrt{(l' - m' + 1)(l' + m' + 1/2)} \} \right] \\
 &= M(\psi, \psi', \psi'', \psi''').
 \end{aligned} \tag{68}$$

Mit dieser Abkürzung kann der Erwartungswert des Operators für beide Kombinationen der Nukleonenfunktionen kurz angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi^* \psi'^* | \frac{1}{2} (g_s^{(1)} - g_l^{(1)}) \vec{j}_2 \vec{\sigma}_1 + \frac{1}{2} (g_s^{(2)} - g_l^{(2)}) \vec{j}_1 \vec{\sigma}_2 | \psi'' \psi''' \rangle &= \\
 \cdot | \psi'' \psi''' - \psi''' \psi'' \rangle &= M(\psi', \psi, \psi''', \psi'') +
 \end{aligned} \tag{69}$$

$$+ M(\psi, \psi', \psi'', \psi''') - M(\psi', \psi, \psi'', \psi''') - M(\psi, \psi', \psi''', \psi''),$$

wobei die verschiedenen Matrixelemente durch Vertauschung der Quantenzahlen aus dem ersten hervorgehen, z. B. erhält man $M(\psi', \psi, \psi'', \psi''')$ aus $M(\psi, \psi', \psi'', \psi''')$ durch die Vertauschung $j' \longleftrightarrow j$, $m' \longleftrightarrow m$, $l' \longleftrightarrow l$, $n' \longleftrightarrow n$, $t' \longleftrightarrow t$.

Zur Berechnung der Matrixelemente (57) benötigen wir den Wert der Matrixelemente (67) und (69) für den Spezialfall $\psi = \psi''$ und $\psi' = \psi''$; es ist

$$\langle \psi^* \psi'^* | (g_i^{(1)} + g_j^{(2)}) \overset{\rightarrow}{(j_1 j_2)} | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = (\delta_{t,1/2} + \delta_{t',1/2}) \{ m m' - \delta_{n,l,j,t;n',l',j',t'} [\delta_{m,m'} m m' + \frac{1}{2} \delta_{m,m'+1} (j+m)(j-m+1) + \frac{1}{2} \delta_{m,m'-1} (j-m)(j+m+1)] \} \quad (67a)$$

und

$$\begin{aligned} \langle \psi^* \psi'^* | \frac{1}{2} (g_s^{(1)} - g_i^{(1)}) \overset{\rightarrow}{(j_2 \sigma_2)} + \frac{1}{2} (g_s^{(2)} - g_i^{(2)}) \overset{\rightarrow}{(j_1 \sigma_2)} | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = \\ - \left((\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t,1/2} + \mu_n \delta_{t,-1/2} \right) \frac{2 m m'}{2l+1} 2(j-l) + \\ + \left((\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t',1/2} + \mu_n \delta_{t',-1/2} \right) \frac{2 m m'}{2l'+1} 2(j'-l') - \\ - \delta_{n,l,j,t;n',l',j',t'} \left((\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t,1/2} + \mu_n \delta_{t,-1/2} \right) \cdot \\ \cdot \frac{2(j-l)}{2l+1} \left(\delta_{m,m'-1} (j-m)(j+m+1) + \delta_{m,m'+1} (j+m)(j-m+1) + \right. \\ \left. + 2 \delta_{m,m'} m m' \right) - \delta_{n,l,j,t;n',l',j',t'} \left((\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t',1/2} + \right. \\ \left. + \mu_n \delta_{t',-1/2} \right) \frac{2(j'-l')}{2l'+1} \left(\delta_{m,m'+1} (j+m)(j-m+1) + \right. \\ \left. + \delta_{m,m'-1} (j-m)(j+m+1) + 2 \delta_{m,m'} m m' \right) = \left((\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t,1/2} + \right. \\ \left. + \mu_n \delta_{t,-1/2} \right) \frac{4(j-l)}{2l+1} m m' + \left((\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t',1/2} + \right. \\ \left. + \mu_n \delta_{t',-1/2} \right) \frac{4(j'-l')}{2l'+1} \left[m m' - \delta_{n,l,j,t;n',l',j',t'} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\delta_{m,m'-1} (j-m)(j+m+1) + \delta_{m,m'+1} (j+m)(j-m+1) + 2 \delta_{m,m'} m m' \right) \right] \end{aligned} \quad (69a)$$

Sind in einer SLATER-Determinante alle Nucleonenfunktionen einer abgeschlossenen Protonen- oder Neutronenschale enthalten, so kann die Summe der Matrixelemente für die zu einem gegebenen Tripel n, l, t gehörenden Nucleonenfunktionen berechnet werden:

Zu einem Wert j gibt es $2j+1$ Nucleonenfunktionen, daher zu einem festen l

$2l+2$ Nucleonenfunktionen mit $j = l + 1/2$ und

$2l$ Nucleonenfunktionen mit $j = l - 1/2$,

daher lautet die Summe der Matrixelemente (63), bzw. (64)

$$\begin{aligned} \sum_{j,m} \langle \psi^* | \mu_{op}^1 | \psi \rangle = (2l+2) \left(l + \frac{3}{2} \right) (l \delta_{t,1/2} + \\ + \mu_p \delta_{t,1/2} + \mu_n \delta_{t,-1/2}) + 2l(l - \frac{1}{2}) [(l+1) \delta_{t,1/2} - \\ - \mu_p \delta_{t,1/2} - \mu_n \delta_{t,-1/2}] = (2l+1) [2l(l+1) \delta_{t,1/2} + \\ + 3(\mu_p \delta_{t,1/2} + \mu_n \delta_{t,-1/2})]. \end{aligned}$$

Nun können wir auch die in (57) auftretenden Summen über die zu nem Tripel n, l, t gehörenden Nucleonenpaare ausführen; sowohl als auch ψ' durchläuft einerseits $2l+2$ Nucleonenfunktionen mit $=l+1/2$, ($m = -l-1/2, \dots, l+1/2$), andererseits $2l$ Nucleonenfunktionen mit $j = l-1/2$, ($m = -l+1/2, \dots, l-1/2$). Die Summation über die Matricelemente (67 a) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j, j', m, m'} \langle \psi^* \psi'^* | (g_l^{(1)} + g_l^{(2)}) (\vec{j}_1 \vec{j}_2) | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = \\ = -\delta_{l, 1/2} \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} (2j+1) j(j+1) = \\ = -\delta_{l, 1/2} (2l+1) (2l^2 + 2l + \frac{3}{2}). \end{aligned} \quad (71)$$

Die Summation über die Matricelemente (69 a) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j, j', m, m'} \langle \psi^* \psi'^* | \frac{1}{2} (g_g^{(1)} - g_l^{(1)}) (\vec{j}_2 \vec{\sigma}_1) + \\ + \frac{1}{2} (g_s^{(2)} - g_l^{(2)}) (\vec{j}_1 \vec{\sigma}_2) | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = \\ = -\frac{4}{2l+1} \left[(\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{l, 1/2} + \mu_n \delta_{l, -1/2} \right] \cdot \\ \cdot \sum_{j=l-1/2}^{l+1/2} (j-l) j(j+1) (2j+1) = \\ = -3 [(\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{l, 1/2} + \mu_n \delta_{l, -1/2}] (2l+1). \end{aligned} \quad (72)$$

Die Addition aller Beiträge zum Erwartungswert für das magnetische Moment, die von den Nucleonen einer abgeschlossenen $n-l-t$ -Schale herrühren [gegeben durch die Matricelemente (70), (71) und (72)] ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{j, m} \langle \psi^* | \mu_{op}^1 | \psi \rangle + \sum_{j, j', m, m'} \langle \psi^* \psi'^* | \mu_{op}^{12} + \\ + \mu_{op}^{21} | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

as heißt eine abgeschlossene Nucleonenschale besitzt kein magnetisches Moment. Die Formeln (70), (71) und (72) zeigen außerdem, daß auch das magnetische Moment einer $n-l-j-t$ -Schale Null ist.

Unter den Nucleonenpaaren, mit welchen die Matricelemente (57) berechnet werden, greifen wir nun alle die Paare heraus, in denen das erste Nucleon alle Nucleonen einer bestimmten Schale durchläuft, während das zweite ein festes Nucleon außerhalb dieser Schale ist.

$$\sum_m \langle \psi^* \psi'^* | (g_l^{(1)} - g_l^{(2)}) (\vec{j}_1 \vec{j}_2) | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = (\delta_{l, 1/2} + \delta_{l', 1/2}) \sum_{j, m} m m' = 0 \quad (74)$$

$$\sum_m \langle \psi^* \psi'^* | \frac{1}{2} (g_s^{(1)} - g_l^{(1)}) (\vec{j}_2 \vec{\sigma}_1) + \frac{1}{2} (g_s^{(2)} - g_l^{(2)}) (\vec{j}_1 \vec{\sigma}_2) | \psi \psi' - \psi' \psi \rangle = 0. \quad (75)$$

(73), (74) und (75) zeigen, daß volle Schalen bei der Berechnung der Matrixelemente (57) keinen Beitrag liefern.

Wenden wir uns nun den Matrixelementen (58) zu. Ist eine vollständige Nucleonenschale sowohl in D_r als auch in D_s enthalten, so kann von der Summe über die Matrixelemente zunächst jener Teil ausgeführt werden, in dem ψ alle zu den Nucleonen der betreffenden Schale gehörigen Nucleonenfunktionen durchläuft. Wir berechnen diese aus (67) und (69), indem wir zunächst den Wert dieser beiden Matrixelemente für den Spezialfall anschreiben: $\psi = \psi'', \psi' \neq \psi'''$

$$\begin{aligned} \langle \psi^* \psi'^* | (g_l^{(1)} + g_l^{(2)}) (\vec{j}_1 \vec{j}_2) | \psi \psi''' - \psi''' \psi \rangle = \\ = - \delta_{n, l, j, t; n', l', j', t'} \cdot \delta_{n', l', j', t'; n, l, j, t} \cdot \\ \cdot \delta_{t, 1/2} [\delta_{m, m'''+1} \delta_{m', m-1} (j+m) (j-m+1) + \\ + \delta_{m, m'''-1} m', m+1 (j-m) (j+m+1)]. \end{aligned} \quad (67b)$$

Dieses Matrixelement verschwindet offenbar, wenn ψ und ψ' Nucleonenzustände verschiedener Schalen beschreiben, was zwangsläufig der Fall ist, wenn ψ eine Nucleonenfunktion aus einer in D_r und D_s enthaltenen kompletten $n-l-t$ -Schale ist.

$$\begin{aligned} \langle \psi^* \psi'^* | \frac{1}{2} (g_s^{(1)} - g_l^{(1)}) (\vec{j}_2 \sigma_1) + \frac{1}{2} (g_s^{(2)} - g_l^{(2)}) \cdot \\ \cdot (\vec{j}_1 \sigma_2) | \psi \psi''' - \psi''' \psi \rangle = [(\mu_p - \frac{1}{2}) \delta_{t', 1/2} + \\ + \mu_n \delta_{t', -1/2}] \frac{1}{2l'+1} \delta_{t', n', l', m'; t'', n'', l'', m'''} \cdot \\ \cdot [-2m (\delta_{j', j'''+1} + \delta_{j', j'''+1}) \sqrt{(l' - m' + \frac{1}{2})(l' + m' + \frac{1}{2})} + \\ + \delta_{t, n, l, j; n', l', m, m'-1} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \cdot \\ \cdot \{ (\delta_{j, j'} \delta_{j, j'''+1} + \delta_{j, j'''} \delta_{j, j'+1} \sqrt{(j-m)(j-m-1)} - \\ - (\delta_{j, j'''} \delta_{j, j'-1} + \delta_{j, j'} \delta_{j, j'''+1}) \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} \} + \\ + \delta_{m, m'+1} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \{ (\delta_{j, j'} \delta_{j, j'''+1} + \\ + \delta_{j, j'''} \delta_{j, j'-1} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} - (\delta_{j, j'} \delta_{j, j'''+1} + \\ + \delta_{j, j'''} \delta_{j, j'+1} \sqrt{(j+m)(j+m-1)} + 2 \delta_{mm'} m \cdot \\ \cdot \sqrt{(l-m+\frac{1}{2})(l+m+\frac{1}{2})} (\delta_{j, j'} \delta_{j, j'''+1} + \delta_{j, j'} \delta_{j, j'''+1} + \\ + \delta_{j, j'''} \delta_{j, j'+1} + \delta_{j, j'''} \delta_{j, j'-1}) \}]. \end{aligned} \quad (69b)$$

Für den Fall, daß ψ und ψ' aus verschiedenen Nucleonenschalen stammen, reduziert sich dieser Ausdruck auf den ersten Term. Lassen wir nun ψ alle Nucleonenfunktionen einer bestimmten (in D_r und D_s enthaltenen) kompletten $n-l-t$ -Schale durchlaufen, und summieren wir die Matrixelemente,

$$\sum_{j, m} \langle \psi^* \psi'^* | (\mu_{op}^{12} + \mu_{op}^{21}) | \psi \psi''' - \psi''' \psi \rangle = 0,$$

so sehen wir, daß eine vollständige $n-l-t$ -Schale keinen Beitrag zum Matrixelement (58) liefert. (73), (74), (75) und (76) führen uns also

auf das wichtige Ergebnis, daß bei der Berechnung des Erwartungswertes des Operators (54) in den SLATER-Determinanten vorkommende vollbesetzte Schalen in den mit einer einzigen SLATER-Determinante gebildeten Erwartungswerten immer weggelassen werden können, dagegen in den mit zwei SLATER-Determinanten gebildeten Übergangselementen nur dann wegzulassen sind, wenn die betreffenden Schalen in beiden SLATER-Determinanten enthalten sind.

Abschließend seien nun noch einmal alle die Matrixelemente zusammengestellt, die einen von Null verschiedenen Beitrag zum magnetischen Moment eines Kerns liefern.

Der Erwartungswert des Operators (9) ist entsprechend der Zerlegung des Operators in (54)

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{JM}^* | \mu_{op} | \Phi_{JM} \rangle = & J \frac{1}{J+1} \left[\sum_r a_r^2 \langle D_r^* | \sum_i \mu_{op}^i | D_r \rangle + \right. \\ & + \sum_r a_r^2 \langle D_r^* | \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} (\mu_{op}^{ik} + \mu_{op}^{ki}) | D_r \rangle + \\ & \left. + \sum_{r \neq s} a_r a_s \langle D_r^* | \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} (\mu_{op}^{ik} + \mu_{op}^{ki}) | D_s \rangle \right] \mu_0, \end{aligned}$$

wobei die Zerlegung dieser Erwartungs- und Übergangselemente in Matrixelemente der Ein-, bzw. Zweiteilchenzustände durch die Formeln (62), (57), (58) und (59) gegeben ist. Die numerischen Werte sind für die Matrixelemente

- (62) angeschrieben in (63), bzw. (64),
- für (57) angeschrieben in (67 a) und (69 a),
- für (58) angeschrieben in (67 b) und (69 b) und
- für (59) angeschrieben in (67) und (69).

IV. Momente der Kerne N^{15} , N^{16} , O^{17} und F^{17}

A. Elektrische Quadrupolmomente

N^{15} (Grundzustand): Nach den Tabellen von AJZENBERG und LAURITSEN sowie von KLINKENBERG [2] besitzt dieser Kern im Grundzustand den Drehimpuls $J = 1/2$ und ungerade Parität. Nach dem Schalenmodell entspricht dem die Konfiguration $O^{16} - 2p_{1,1}^+$, das heißt es fehlt aus der $2p$ -Protonenschale ein Proton, während die $1s$ -Protonenschale und die $1s$ - und $2p$ -Neutronenschale voll besetzt sind.

$$\begin{aligned} \Phi &= D - \left\{ 2p_{3,3}^+ 2p_{3,1}^+ 2p_{3,-1}^+ 2p_{3,-3}^+ 2p_{1,1}^+ \right\} \\ Q &= \frac{4}{e} \langle \Phi^* | \bar{q}_{op} | \Phi \rangle = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle \Phi^* | Q_{2op}^0 | \Phi \rangle = \\ &= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (-\langle 2p_{1,-1}^+ | Q_{2op}^0 | 2p_{1,-1}^+ \rangle) = 0. \end{aligned}$$

N^{16} (Grundzustand): Dieser Zustand wird sowohl von AJZENBERG und LAURITSEN [2] als auch von INGLIS [23] als Zustand ungerader Parität mit dem Gesamtdrehimpuls $J = 2$ angegeben. Die Konfiguration ist $O^{16} = 2p^+ + 3d^0$, das heißt die 1s-Schalen sind voll besetzt, aus der 2p-Protonenschale fehlt ein Proton, während außer der vollbesetzten 2p-Neutronenschale noch ein Neutron der 3d-Schale vorhanden ist. Für die Energie des Grundzustandes sind hauptsächlich die Zustandsfunktionen ausschlaggebend [18], die sich bei Drehungen nach der Darstellung $\mathfrak{D}_{1/2} \times \mathfrak{D}_{5/2}$ transformieren.

$$\begin{aligned}\Phi &= \sqrt{\frac{5}{6}} \left(D_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} D_2 \right) \quad \text{mit} \\ D_1 &= \{ 2p_{3,3}^+ 2p_{3,1}^+ 2p_{3,-1}^+ 2p_{3,-3}^+ 2p_{1,-1}^+ 3d_{5,5}^0 \} \\ D_2 &= \{ 2p_{3,3}^+ 2p_{3,1}^+ 2p_{3,-1}^+ 2p_{3,-3}^+ 2p_{1,1}^+ 3d_{5,3}^0 \} \\ Q &= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle \Phi^* | Q_{2op}^0 | \Phi \rangle = \\ &= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left[\frac{5}{6} \langle D_1^* | Q_{2op}^0 | D_1 \rangle + \frac{1}{6} \langle D_2^* | Q_{2op}^0 | D_2 \rangle \right] = \\ &= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left[-\frac{5}{6} \langle 2p_{1,1}^+ | Q_{2op}^0 | 2p_{1,1}^+ \rangle + \right. \\ &\quad + \frac{5}{6} \langle 3d_{5,5}^0 | Q_{2op}^0 | 3d_{5,5}^0 \rangle - \frac{1}{6} \langle 2p_{1,-1}^+ | Q_{2op}^0 | 2p_{1,-1}^+ \rangle + \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \langle 3d_{5,3}^0 | Q_{2op}^0 | 3d_{5,3}^0 \rangle \right] = 0.\end{aligned}$$

O^{17} (Grundzustand): Während man in früheren Arbeiten einen Gesamtdrehimpuls $J = 1/2$ als wahrscheinlich annahm und demnach vermutete, daß außer den vollbesetzten 1s- und 2p-Schalen ein Neutron $2s_1$ vorhanden sei, geben neuere Arbeiten [24], [2], [23] übereinstimmend den Gesamtdrehimpuls mit $J = 5/2$ an, woraus hervorgeht, daß das Neutron im Niveau $3d_5$ sein muß. Die Parität des Zustandes ergibt kein Kriterium für die Wahl der Neutron-Zustandsfunktion, da sowohl für den $l = 0$ Zustand als auch für den $l = 2$ Zustand der Spiegelungscharakter gleich $+1$ ist. Die Zustandsfunktion lautet:

$$\begin{aligned}\Phi &= D = \{ 3d_{5,5}^0 \} \\ Q &= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle \Phi^* | Q_{2op}^0 | \Phi \rangle = \\ &= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \langle 3d_{5,5}^0 | Q_{2op}^0 | 3d_{5,5}^0 \rangle = 0.\end{aligned}$$

F^{17} (Grundzustand): Auch für den Grundzustand dieses Elements wurde erst in den letzten Jahren der Gesamtdrehimpuls $J = 5/2$ mit Sicherheit festgestellt (AJZENBERG und LAURITSEN [2], SHERR, LI,

CHRISTY [25]), während früher $J = 1/2$ angenommen wurde. Das Proton befindet sich also im Niveau $3 d_{5/2}$. Die Parität des Zustandes ist wieder $+1$. Die Zustandsfunktion lautet:

$$\Phi = D = \{3 d_{5/2}^+\}.$$

$$Q = \frac{4}{e} \left| \frac{\pi}{5} \langle 3 d_{5/2} | Q_{20p}^0 | 3 d_{5/2} \rangle - \frac{4}{e} \left| \frac{\pi}{5} \frac{e}{a} \right| \frac{\pi}{5} \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = -2a^{-1}.$$

Für die mit dem Kernradius zusammenhängende Größe a nimmt FLORIAN für den Kern O^{16} Werte von $0,5$ bis $0,8 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ an [18]. Da für diesen im Grundzustand nur aus vollbesetzten Schalen bestehenden Kern der Kernradius besonders klein sein muß, muß für F^{17} a ungefähr denselben Wert wie für die angeregten Zustände von O^{16} haben. Mit $a = 0,8 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ ergibt sich $Q = -0,025 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

B. Magnetische Momente

N^{15} (Grundzustand):

$$\begin{aligned} \mu &= \langle D^* | \mu_{op} | D \rangle = \\ &= [-\langle 2 p_{1,-1}^+ | \mu_{op}^1 | 2 p_{1,-1}^+ \rangle - \langle 2 p_{1,-1}^+ | 2 p_{1,1}^+ | \mu_{op}^{1,2} + \\ &+ \mu_{op}^{2,1} | 2 p_{1,-1}^+ | 2 p_{1,1}^+ - 2 p_{1,1}^+ | 2 p_{1,-1}^+ \rangle] \frac{\mu_0}{1/2 + 1} = \\ &= [1 - 1/2 \mu_p] \frac{\mu_0}{3/2} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \mu_p \right) \mu_0 = -0,26418 \mu_0. \end{aligned}$$

N^{16} (Grundzustand):

$$\begin{aligned} \mu &= \langle \Phi^* | \mu_{op} | \Phi \rangle = \left(\frac{5}{6} \langle D_1^* | \mu_{op} | D_1 \rangle + \right. \\ &- \frac{1}{6} \langle D_2^* | \mu_{op} | D_2 \rangle + \left. \frac{\sqrt{5}}{3} \langle D_1^* | \mu_{op} | D_2 \rangle \right) = \\ &= \left\{ \frac{5}{6} \left(-\langle 2 p_{1,1}^+ | \mu_{op}^1 | 2 p_{1,1}^+ \rangle + \langle 3 d_{5,5}^0 | \mu_{op}^1 | 3 d_{5,5}^0 \rangle - \right. \right. \\ &- \langle 2 p_{1,1}^+ | 2 p_{1,-1}^+ | \mu_{op}^{1,2} + \mu_{op}^{2,1} | 2 p_{1,1}^+ | 2 p_{1,-1}^+ - 2 p_{1,-1}^+ | 2 p_{1,1}^+ \rangle \\ &- \left. \langle 2 p_{1,1}^+ | 3 d_{5,5}^0 | \mu_{op}^{1,2} + \mu_{op}^{2,1} | 2 p_{1,1}^+ | 3 d_{5,5}^0 - 3 d_{5,5}^0 | 2 p_{1,1}^+ \rangle \right) + \\ &+ \frac{1}{6} \left(-\langle 2 p_{1,-1}^+ | \mu_{op}^1 | 2 p_{1,-1}^+ \rangle + \langle 3 d_{5,3}^0 | \mu_{op}^1 | 3 d_{5,3}^0 \rangle - \right. \\ &- \langle 2 p_{1,-1}^+ | 2 p_{1,1}^+ | \mu_{op}^{1,2} + \mu_{op}^{2,1} | 2 p_{1,-1}^+ | 2 p_{1,1}^+ - 2 p_{1,1}^+ | 2 p_{1,-1}^+ \rangle - \\ &- \left. \langle 2 p_{1,-1}^+ | 3 d_{5,3}^0 | \mu_{op}^{1,2} + \mu_{op}^{2,1} | 2 p_{1,-1}^+ | 3 d_{5,3}^0 - 3 d_{5,3}^0 | 2 p_{1,-1}^+ \rangle \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{5}}{3} \langle 2 p_{1,-1}^+ | 3 d_{5,5}^0 | \mu_{op}^{1,2} + \mu_{op}^{2,1} | 2 p_{1,1}^+ | 3 d_{5,3}^0 - \\ &- \left. 3 d_{5,3}^0 | 2 p_{1,1}^+ \rangle \right\} \frac{\mu_0}{2 + 1} = \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9} \mu_p + \frac{52}{15} \mu_n \right) \frac{\mu_0}{3} = -2,32776 \mu_0. \end{aligned}$$

O^{17} (Grundzustand):

$$\begin{aligned}\mu &= \langle \Phi^* | \mu_{op} | \Phi \rangle = \langle 3 d_{5,5}^0 | \mu_{op}^1 | 3 d_{5,5}^0 \rangle \frac{\mu_0}{5/2 + 1} = \\ &= \frac{7}{2} \mu_n \frac{\mu_0}{7/2} = \mu_n \mu_0 = -1,912\ 80 \mu_0.\end{aligned}$$

F^{17} (Grundzustand):

$$\begin{aligned}\mu &= \langle \Phi^* | \mu_{op} | \Phi \rangle = \langle 3 d_{5,5}^0 | \mu_{op}^1 | 3 d_{5,5}^+ \rangle \frac{\mu_0}{5/2 + 1} = \\ &= \frac{7}{2} (2 + \mu_p) \frac{\mu_0}{7/2} = (2 + \mu_p) \mu_0 = +4,792\ 55 \mu_0.\end{aligned}$$

Schlußbetrachtungen

Für die im letzten Abschnitt berechneten Werte der Kernmomente liegen folgende experimentellen Vergleichsdaten vor:

Kern	experimenteller Wert	berechneter Wert
N^{15}	$\mu = -0,282\ 99 \pm 0,000\ 03 \mu_0$ (MACK, KLINKENBERG [2])	$\mu = -0,264\ 18 \mu_0$
O^{17}	$\mu = -1,8935 \pm 0,0002 \mu_0$ (KLINKENBERG [2])	$\mu = -1,912\ 80 \mu_0$
	$Q = -0,005 \pm 0,002 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ (KLINKENBERG [7], Geschwind... [5]) bzw. $= -0,004$ (BIRD [5])	$Q = 0$

Bei diesen beiden Kernen läßt sich nur je eine einzige Zustandsfunktion aufstellen, solange man an der Annahme festhält, daß nur die Nucleonen aufgebrochener Schalen Beiträge zum Drehimpuls des Kernes liefern. Es ist selbstverständlich, daß die mit dieser Zustandsfunktion berechneten magnetischen Momente nicht sehr genau mit den experimentell gefundenen übereinstimmen können und daß das einzelne Neutron des Kernes O^{17} allein kein elektrisches Quadrupolmoment liefern kann. Es ist aber, wie auch SCHULTEN [17] ausführt, beim derzeitigen Stand unserer Kenntnis vom Wechselwirkungspotential der Nucleonen nicht sinnvoll, Konfigurationen mit heranzuziehen, in denen Nucleonen aus vollbesetzten Schalen mit denen der nichtvollbesetzten Schalen gekoppelt sind. Denn einerseits würden solche Konfigurationen nur geringe Beiträge liefern, andererseits sind die Werte, die ohne Berücksichtigung dieser Konfigurationen berechnet werden, mit größerer Unsicherheit behaftet, da die Mischungskoeffizienten von dem Ansatz für

as Wechselwirkungspotential abhängen. Von den Versuchen, durch verschiedene Annahmen über diese Wechselwirkungsenergie die theoretischen Werte den experimentellen besser anzupassen, sei z. B. der von ARIMA und HORIE [15] genannt. Diese konnten relativ gute Übereinstimmung der berechneten Werte mit der Erfahrung erreichen, indem sie zur Ermittlung der Mischungskoeffizienten die Zweikörper-Wechselwirkung durch empirische Daten über die Paarungsenergie festlegten.

Eine Prüfung der Kernkräfte an Hand der Kernmomente wird durch die vorliegende Arbeit erleichtert, da die Berechnung der Momente, sobald die Mischungskonfigurationen gegeben sind, in allen Fällen gleichläuft und daher die im Abschnitt III als Funktionen der Quantenzahlen der Einteilchenfunktionen aufgestellten Formeln für die Kernmomente immer verwendet werden können.

Literatur

1. E. SEGRÈ, *Experimental Nuclear Physics*. New York: J. Wiley & Sons, 1953, Vol I, Part III, N. F. RAMSEY, *Nuclear Moments and Statistics*.
2. J. E. MACK, *Rev. Mod. Phys.* **22**, 64 (1950).
3. F. AJZENBERG und T. LAURITSEN, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 321 (1952).
4. P. KLINKENBERG, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 63 (1952).
5. W. GORDI, *Phys. Rev.* **76**, 139 (1949).
6. C. H. TOWNES, H. M. FOLEY und W. LOW, *Phys. Rev.* **76**, 1415 (1949).
7. A. L. SHAWLOW und C. H. TOWNES, *Phys. Rev.* **82**, 268 (1951).
8. M. F. SCHARFF, *Phys. Rev.* **95**, 1112 (1954).
9. TH. SCHMIDT, *Z. Phys.* **106**, 358 (1937).
10. W. HEISENBERG, *Z. Phys.* **96**, 473 (1935).
11. E. FEENBERG und E. WIGNER, *Phys. Rev.* **51**, 95 (1937).
12. H. A. BETHE und M. E. ROSE, *Phys. Rev.* **51**, 283 (1937).
13. H. A. BETHE und M. E. ROSE, *Phys. Rev.* **51**, 205 (1937).
14. M. PHILLIPS, *Phys. Rev.* **57**, 160 (1940).
15. L. W. NORDHEIM, *Phys. Rev.* **75**, 1894 (1949).
16. E. BAGGE, *Naturwiss.* **35**, 375 (1948).
17. O. HAXEL, J. H. JENSEN und H. E. SUESS, *Naturwiss.* **35**, 376 (1948); **36**, 153, 155 (1949); *Phys. Rev.* **75**, 1766 (1949); *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **26**, 244 (1952).
18. MARIA GOEPPERT-MAYER, *Phys. Rev.* **75**, 1969 (1949); **78**, 16, 22 (1950).
19. J. H. JENSEN und M. GOEPPERT-MAYER, *Phys. Rev.* **85**, 1040 (1952).
20. P. KURATH, *Phys. Rev.* **87**, 218 (1952).
21. P. KURATH, *Phys. Rev.* **88**, 804 (1952).
22. D. R. INGLIS, *Phys. Rev.* **87**, 915 (1952).
23. J. RAINWATER, *Phys. Rev.* **79**, 432 (1950).
24. A. BOHR, *Phys. Rev.* **81**, 134 (1951).
25. AKITO ARIMA und HISHASHI HORIE, *Progr. Theor. Phys.* **11**, 509 (1954); **12**, 623 (1954).
26. A. B. VOLKOV, *Phys. Rev.* **94**, 1664 (1954).
27. SCHULTEN, *Dissertation*, Göttingen (1952).
28. A. FLORIAN, *Dissertation*, Graz (1953).
29. L. ROSENFELD, *Nuclear Forces*, S. 392. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1948.

20. J. M. BLATT und V. F. WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, S. 34 und S. 734. New York: J. Wiley & Sons, 1952.
21. R. G. SACHS, Nuclear Theory, S. 8. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Company, 1953.
22. B. VAN DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, S. 69. Berlin: Springer-Verlag, 1932.
23. D. R. INGLIS, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 (1953).
24. F. ADLER und F. C. YU, Phys. Rev. **81**, 1067 (1951).
25. R. SCHERR, C. W. LI und R. F. CHRISTY, Phys. Rev. **94**, 1076 (1954).

Über die Abhängigkeit des Röntgenspektrums von der chemischen Bindung

(Untersuchung der $\text{Co-K}\beta_1$ -Linie verschiedener Kobaltverbindungen mit einfachen Mitteln)

Von

Heribert Herglotz und Ernst Deimel

Institut für Experimentalphysik der Technischen Hochschule in Wien

Mit 16 Abbildungen

(Eingelangt am 1. August 1955)

Zusammenfassung

Unter Ausnützung der von der Präzisions-Gitterkonstantenmessung in der Metallkunde her bekannten Gesetzmäßigkeiten gelingt es, die Bindungsabhängigkeit der $\text{K}\beta_1$ -Linien verschiedener Kobaltverbindungen zu messen und dabei mit einfachen Rückstrahlkamasas die Genauigkeit, die mit klassischen Spektrographen erreicht wurde, zu übertreffen.

In einer früheren Mitteilung [1] war die Möglichkeit gezeigt worden, bei zweckmäßiger Ausnützung der für Rückstrahlaufnahmen geltenden Gesetzmäßigkeiten die Bindungsabhängigkeit des Röntgenspektrums mit einfachen Mitteln zu untersuchen. Man macht sich dabei die aus der Metallkunde zur genauen Messung des Gitterparameters geläufigen Erscheinungen zunutze. Es ist bekannt, daß die Genauigkeit der Gitterkonstantenmessung mit wachsendem Glanzwinkel steigt. Differenziert man die BRAGGSche Beziehung

$$n \lambda = 2 d \sin \vartheta \quad (1)$$

mit n = Ordnung der Beugung, λ = Wellenlänge, d = Netzebenenabstand, ϑ = Glanzwinkel)

für konstantem λ , so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial d} \right)_{\lambda} = - \frac{1}{d} \operatorname{tg} \vartheta. \quad (2)$$

Da der Tangens in der Nähe von 90° sehr große Werte annimmt, verursacht eine geringe Änderung der Gitterabmessungen Δd schon eine relativ große Änderung $\Delta \vartheta$ des Glanzwinkels. Das konstante λ der Gleichung wird in der Praxis durch eine monochromatische Strahlung

realisiert, die man sich aus den verschiedenen in Frage kommenden $K\alpha$ -Strahlungen der Elemente so auswählt, daß sie mit einer Netzebene des zu untersuchenden Gitters eine Beugung mit großem ϑ liefert. Die solcherart erreichbare Genauigkeit der Gitterkonstantenmessung bei technischen Metallen wird im allgemeinen mit $\pm 0,1 \text{ XE} = 10^{-12} \text{ cm}$ angegeben. Sie kann jedoch noch größer werden, wenn man nicht die absolute, sondern die relative Genauigkeit in Betracht zieht, das heißt also, weder Aufnahmevorrichtung noch Stelle der Probe von Aufnahme zu Aufnahme ändert. Die Abb. 1 soll ein Beispiel hierfür liefern. Aus

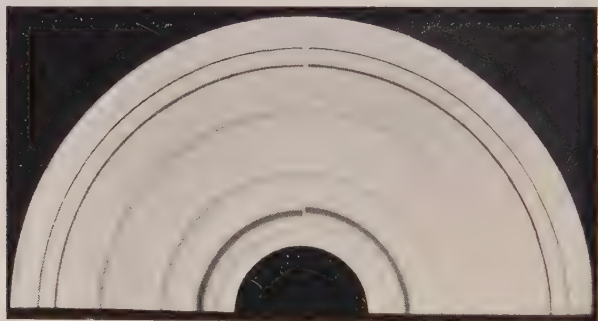


Abb. 1. Rückstrahlaufnahmen von der Zug- und Druckseite eines versilberten Biegestabes mit Nickel- $K\alpha$ -Strahlung, aufgenommen mit fokussierender Kegelkamera, Sektorblende und Molybdänpulver als Eichsubstanz. (Aus F. REGLER, Radex-Rundschau 1952, S. 167)

dem gleichen Film, dessen eine Hälfte jeweils abgedeckt war, ist unter Beibehaltung des Probenabstandes die gleiche Stelle eines versilberten Biegestabes untersucht worden, der einmal in der einen, dann in der anderen Richtung elastisch durchgebogen war, so daß die untersuchte Stelle einmal auf der Zug-, das anderemal auf der Druckseite des Biegestabes lag. Während die Linien des als Eichstoff aufgebrachten Molybdänpulvers sich nicht verschoben haben und auch die Interferenzen mit kleinerem ϑ , die vom Probestab herrühren, keine merkliche Änderung erfuhren, ist das $\text{Ni } K\alpha$ -Dublett der (224)-Interferenz bei rund 84° deutlich verschoben. Dies soll ein anschaulicher Beweis sein, daß die Empfindlichkeit gegenüber einer Netzebenenabstandsänderung mit wachsendem Glanzwinkel radikal steigt und zugleich einen Fall „relativer Meßgenauigkeit“ demonstrieren.

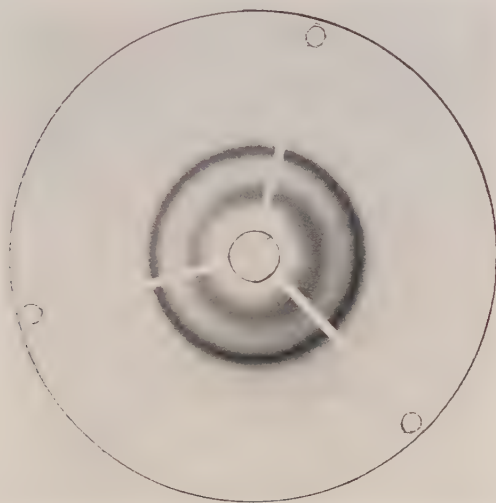
Die gleiche Gesetzmäßigkeit, nämlich daß die Empfindlichkeit mit steigendem Glanzwinkel wächst, gilt auch bei der zu (2) symmetrischen Beziehung

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \right)_d = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \vartheta \quad (3)$$

für Änderungen der Wellenlänge. Schreibt man das totale Differential

$$\Delta \vartheta = \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{\Delta d}{d} \right) \operatorname{tg} \vartheta \quad (4)$$

o geht daraus hervor, daß gleich große $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ und $\frac{\Delta d}{d}$ (bzw. $\frac{\Delta a}{a}$, wenn a die Gitterkonstante im kubischen System bedeutet), bei gleichem Δ dem Betrag nach gleiche Wirkungen auf den Glanzwinkel ausüben. Bei einer Gitterkonstante von rund 4 \AA , wie sie etwa Gold oder Aluminium besitzen, beträgt das $\Delta a/a$, wenn man $\Delta a = 0,1 \text{ XE} = 10^{-12} \text{ cm}$ als Grenze der Genauigkeit gelten läßt, $2,5 \cdot 10^{-5}$. Das $\Delta \lambda$, das den gleichen Effekt hervorbringt, ergibt sich bei einer Wellenlänge von rund $1,5 \text{ \AA}$, wie sie von der Kupfer-K-Serie repräsentiert wird, zu



bb. 2. Nickel $K\alpha$ -Dublett, gebeugt an einer Gold-Platinlegierung mit 1,67 Gewichtsprozent Platin. Drei Spreizen dienten zum Niederhalten des Films

0,037 XE oder anders ausgedrückt: Eine Wellenlängenänderung $\Delta \lambda$ wirkt in den hier als Beispiel angeführten Fällen des Aluminiums und der Kupfer-K-Strahlung eine etwa 2,5-mal größere Wirkung auf den Glanzwinkel aus als eine Gitterkonstantenänderung Δa von gleicher Größe. Die Kraft der Tangensfunktion für die Auflösung eines $\Delta \lambda$, in diesem Fall des Ni- $K\alpha$ -Dubletts mit einem Wellenlängenunterschied von 4 XE, soll an Hand von Abb. 2 gezeigt werden, auf der diesen 4 XE ein Unterschied von 14 mm im Durchmesser der Interferenzkreise entsprechen.

Aus diesen Überlegungen ging hervor, daß im Gebiete der Elemente Chrom bis Kupfer, die zu den technisch wichtigsten Elementen zählen, die Abhängigkeit des Röntgenspektrums von der chemischen Bindung mit den in der Metallkunde üblichen Meßverfahren nachweisbar und meßbar sein müßte. Bekanntlich ist die Existenz dieser Abhängigkeit seit SWINNE [2] theoretisch und seit BERGENGREN [3, 4] experimentell gesichert. Die Wellenlängenverschiebungen $\Delta \lambda$, die durch chemische

Bindung verursacht werden, betragen im Falle der K-Strahlungen der Elemente niedriger Ordnungszahl, etwa Na (11) bis Cl (17), mehrere XE, im Falle der Elemente Chrom (24) bis Cu (29) nur noch wenige Zehntel —XE und es erfordert ihre Beobachtung großen experimentellen Aufwand.

Sprechen diese einleitenden Überlegungen dafür, daß die Bindungsabhängigkeit des Röntgenspektrums mit den in der Metallkunde zur Präzisions-Gitterkonstantenmessung üblichen Methoden meßbar sein müsse, so stand dem die allgemein verbreitete Ansicht gegenüber, daß man mit vielkristallinen Beugungsgittern, das heißt mit den DEBYE-SCHERRER-Verfahren, niemals spektroskopische Genauigkeit erreichen könne.

Die oben zitierte Arbeit [1] hat jedoch gezeigt, daß grundsätzlich die Abhängigkeit des Röntgenspektrums von der chemischen Bindung mit vielkristallinem Beugungsgitter nach der Rückstrahlmethode nachweisbar ist. Der dort mitgeteilten Verschiebung der Fe $K\beta_1$ -Linie von Eisenglanz gegenüber der entsprechenden Linie des Elements hafteten aber noch verschiedene Mängel an, vor allem, daß der Glanzwinkel von 85° noch nicht das Optimum darstellte und daß die Intensität der Linie nur gering und diese daher nicht photometrierbar war, sondern subjektiv vermessen werden mußte.

In der vorliegenden Arbeit sollten diese noch bestehenden Mängel beseitigt und an Hand einer größeren Versuchsreihe mit Verbindungen eines Elementes die Leistungsfähigkeit des Verfahrens ermittelt werden. Es wurde das Kobalt mit seinen Verbindungen zur Untersuchung erwählt, da es unter den in Frage stehenden Elementen am besten durch die K-Strahlung der Kupferanode, die vorhanden war, bei Sekundärbetrieb erregt wird [5, 6]. Fluoreszenzerregung ist aber wieder für die Untersuchung von Verbindungen unumgänglich. Die $K\beta_1$ -Linie wurde, wie schon bei der Untersuchung des Eisens, zum Gegenstand der Messung gemacht, da sie aus einem äusseren, nämlich einem *M*-Niveau stammt, das von der chemischen Bindung mehr beeinflußt wird als ein inneres. Ihre Intensität ist mit rund ein Drittel der α_1 -Linie noch immer ausreichend.

Apparatur

Die ursprüngliche experimentelle Anordnung ist der Abb. 3 zu entnehmen. Eine SEEMANN-Röhre mit Sekundärstrahler wurde zusammen mit einer drehbaren Planfilmkamera verwendet. Da das Beugungsgitter keinen Temperaturschwankungen ausgesetzt sein darf, ist es auf einen Temperiergefäß angebracht, das mit einem Ultrathermostaten verbunden ist. Temperaturschwankungen verursachen Gitterkonstantenänderungen und verfälschen die Wellenlängenmessung. Der Strahlengeber, das heißt das Präparat, dessen charakteristische Strahlung auf ihre Bindungsabhängigkeit untersucht werden soll, ist auf einen Sekundärstrahler aufgebracht, der mit der Glühkathode auf Erdpotential liegt. Das Präparat wurde mit wenig Zaponlack angeteigt und auf dem

sekundärstrahler aufgetragen. Der Anodenbrennfleck liegt dem Sekundärstrahler direkt gegenüber und ist von diesem nur 5 bis 10 mm entfernt, so daß die primäre Strahlung weitgehend für die Fluoreszenzregung ausgenutzt wird.

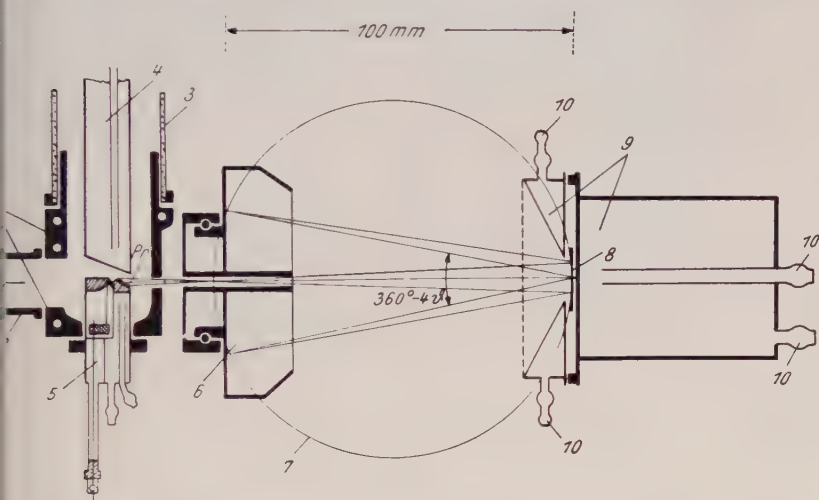


Abb. 3. Schema der Versuchsanordnung zur Registrierung der $K\beta_1$ -Linie von Eisen und Eisenglanz. 1 Röhrenfuß der SEEMANN-Röhre, 2 Pumpenanschluß, 3 Glaszylinder, 4 Anode, 5 Kathode mit Sekundärstrahler (Probe Pr), 6 Planfilm-Rückstrahlkamera, 7 Fokussierungskreis, 8 Beugungsmittel, 9 Temperierkörper, 10 Anschlüsse für den Ultrathermostaten

Bei dieser Art der Sekundärerregung trägt die Anode Hochspannung. Die Wasserkühlung wurde daher als Siedekühlung ausgebildet. Da es sich um Aufnahmen von 10 bis 30 Stunden Belichtungszeit handelte, der Röhrenstrom 30 bis 40 mA und die Spannung 30 bis 40 kV betrug, entwickelt die Siedekühlung eine große Dampfmenge. Diese wurde in einem Rückflußkühler kondensiert und in das Siedegefäß zurückgeleitet. Siedegefäß und Rückflußkühler sind durch einen 30 cm langen Ummischschlauch von 4 cm Durchmesser verbunden, der den gesamten Spannungsabfall zwischen der auf Hochspannung liegenden Anode und dem durch das Leitungswasser geerdeten Kühler aufnimmt. Die Hochspannung an einem langen Glasrohr bis zur Wasserleitung abfallen zu lassen, war wegen des geringen elektrischen Widerstandes des Wassers nicht möglich. Die Abb. 4 gibt das Prinzip der Siedekühlung mit Rückflußkühler wieder.

Das Beugungsgitter

Dieses ist hier nur Hilfsmittel und vertritt den Kristall in der herkömmlichen Röntgenspektroskopie. In der Metallkunde hingegen ist der Gegenstand der Untersuchung, es ist daher dort, wie schon weiter oben betont, die Wellenlänge so auszuwählen, daß sie für die Untersuchung des Gitters günstig ist [Gl. (2)]. Im Falle der Bindungsab-

hängigkeit des Röntgenspektrums hingegen ist die Strahlung Gegenstand der Untersuchung und das Gitter für optimale Untersuchungsbedingungen auszuwählen. Diesem Zweck dient die Kurvenschar der

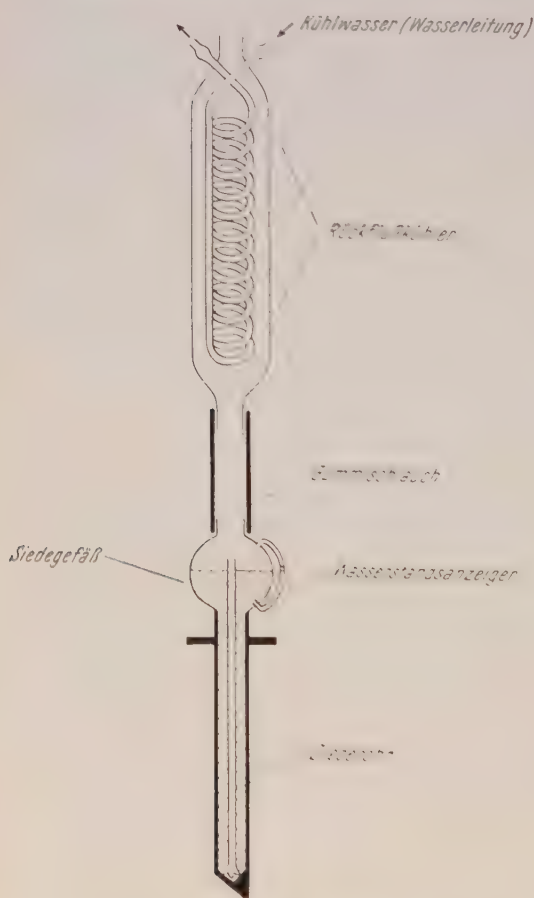


Abb. 4. Anode für die SEEMANN-Röhre bei Sekundärbetrieb, ausgestattet mit Rückfluß-Siedekühlung

kristallreihe bilden, ihre Atomradien ähnlich und die beiden Elemente im periodischen System benachbart sind, war ein weitgehend ungestörtes Gitter zu erwarten. Für eine Beugung der $\text{Co K}\beta_1$ -Linie ($\lambda = 1,6175 \text{ \AA}$) an der (133)-Ebene bei 87° ist eine Gitterkonstante von $a_L = 3,5302 \text{ \AA}$ erforderlich. Man errechnet aus dem VEGARDSchen Gesetz

$$a_L = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2$$

(a_L Gitterkonstante der Legierung, γ_1, γ_2 Molenbrüche der beiden Legierungspartner mit den Gitterkonstanten a_1 und a_2)

Abb. 5, auf der die Funktion $a = f(\lambda)$ für $\vartheta = 87^\circ$ und mehrere Indextripe $h_1 h_2 h_3$ aufgetragen ist. Sie gestattet, für eine gegebene Wellenlänge bei mehreren Indizes $h_1 h_2 h_3$ je eine Gitterkonstante a anzugeben, welche die gegebene Wellenlänge unter dem Winkel $\vartheta = 87^\circ$ beugt. 87° wurde gewählt, da hier meist der Kompromiß zwischen guter Dispersion und schlechter Auflösung infolge Gitterunvollkommenheiten $[\Delta d/d\text{-Glied von Gl. (4)}]$ liegt.

Die ganze Betrachtung ist nur für das kubische System angestellt. Unter den Möglichkeiten, die vom Diagramm der Abb. 5 aufgezeigt werden, wählt man sich die erfolgversprechendste und am leichtesten zu realisierende aus. Die sich für den Fall der $\text{Co K}\beta_1$ -Linie ergebenden Möglichkeiten sind in Tab. 1 zusammengefaßt.

Von diesen wurde nach orientierenden Versuchen ein Mischkristall Ni-Cu gewählt. Da Kupfer und Nickel eine lückenlose Misch-

x_{Ni} zu 0,854 und γ_{Cu} zu 0,146, wenn $a_{\text{Ni}} = 3,5169 \text{ \AA}$ und $a_{\text{Cu}} = 3,6080 \text{ \AA}$ betragen. Die Gewichtsprozente ergeben sich mit den Atomgewichten 8,69, bzw. 63,57 zu 84,4% Nickel und 15,6% Kupfer. Die Herstellung des Beugungsgitters ging wie folgt vor sich: Die berechneten Mengen 1,0 g $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + 10,0 \text{ g Ni}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ wurden in wenig Wasser gelöst, eingedampft und der Rückstand zu den Oxyden verglüht, die auf diese Weise homogen vermischt erhalten wurden. Aus dem

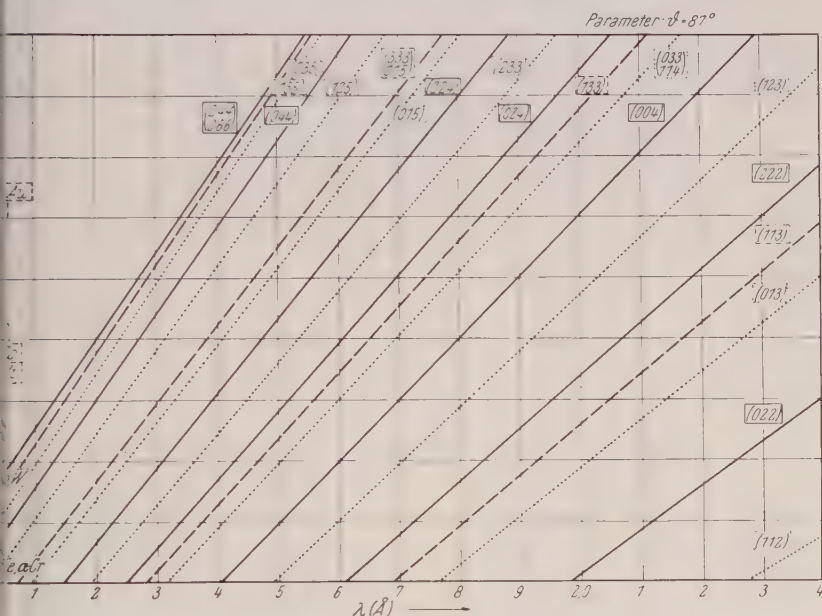


Abb. 5. Verlauf der Funktion $a = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta} \sqrt{\Sigma h_i^2}$ für $\vartheta = 87^\circ$ und mehrere Σh_i^2 .

--- kubisch flächenzentriert, kubisch raumzentriert, ——— kubisch flächen- und raumzentriert

silberförmigen Oxydgemisch wurden Plättchen gepreßt und diese bei 100° C im Wasserstoffstrom reduziert. Es entstanden Metallplättchen mit glatter Oberfläche, mitunter auch mit Rissen; die Plättchen waren meist etwas gewölbt, was sehr günstig war, da sie sich der Fokussierungslinse (Abb. 3) besser anschmiegen. Die Interferenzen, die von diesen Gittern geliefert wurden, waren auch bei ungedrehter Kamera homogen und gleichmäßig schwärzt und selbst bei dem sehr hohen Glanzwinkel von 87° noch deutlich infolge von Gitterunvollkommenheit (1. d. d. Glied der Gl. (4)) zu erkennen. Aus mehreren so hergestellten Gittern wurde das Beste ausgewählt.

Aufnahmen

Die in [1] referierte Untersuchung der $K\beta_1$ -Linie von Eisen und Isenglanz erfolgte noch subjektiv mit dem Maßstab; die beiden Auf-

nahmen wurden auf einem gemeinsamen Film, dessen eine Hälfte jeweils abgedeckt worden war, registriert. Nunmehr sollten die Aufnahmen auf einzelnen Filmen vorgenommen und mit dem Mikrophoto-

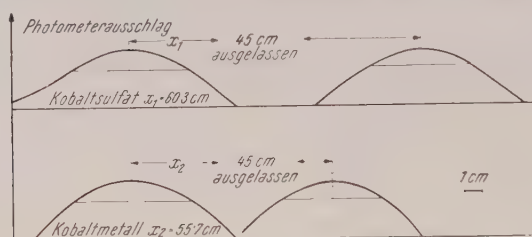


Abb. 6. Maßstabgetreue Übertragung der Photometerkurven von Kobaltmetall und Kobaltsulfat

meter objektiv vermessen werden. Bringt das Photometrieren an und für sich einen Zuwachs an Genauigkeit, so bedeutet das Wechseln des Films einen Verlust an Präzision. Es wurden daher zur Kontrolle der Reproduzierbarkeit und zur Feststellung der erreichbaren Genauigkeit zwischen den Aufnahmen der Kobaltverbindungen solche von Kobaltmetall eingeschaltet. An Verbindungen wurden alle untersucht, die in

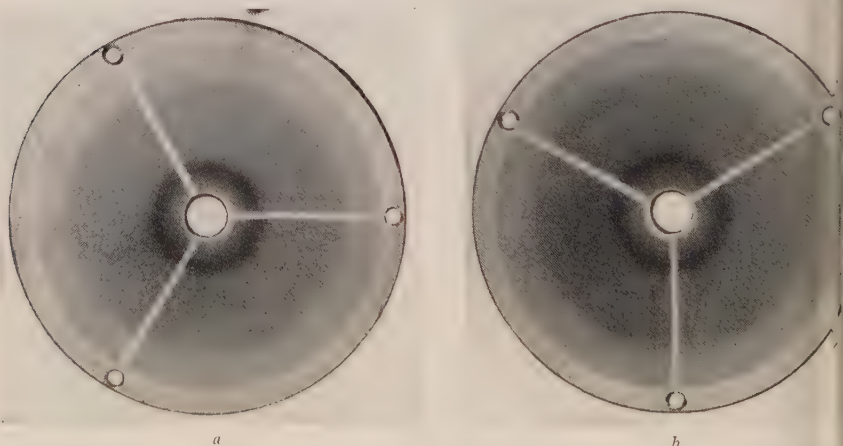


Abb. 7. Kobalt $K\beta_1$ -Linie, gebeugt an einer Nickel-Kupferlegierung mit 15,6 Gewichtsprozent Kupfer
a) von Kobaltmetall herrührend, b) von Kobaltsulfat herrührend

stabiler Form erhältlich waren; während als Salze nur die Verbindung des zweiwertigen Kobalts beständig sind, stand dreiwertiges Kobalt nur in Form von Komplexverbindungen zur Verfügung. Die Aufnahmedaten betragen 40 kV_s (Halbwellenbetrieb), 25 bis 30 mA, 25 bis 40 Stunden Belichtungszeit, wobei Verbindungen mit niedrigem Kobaltgehalt naturgemäß längere Belichtungszeiten erforderten.

Auswertung und Ergebnisse

Als selbstregistrierendes Mikrophotometer wurde ein am Institut entwickeltes Gerät mit Photodiode, Verstärker und Millimeterschreiber verwendet [7]. Zwei Mikrophotogramme sind in Abb. 6 wiedergegeben.

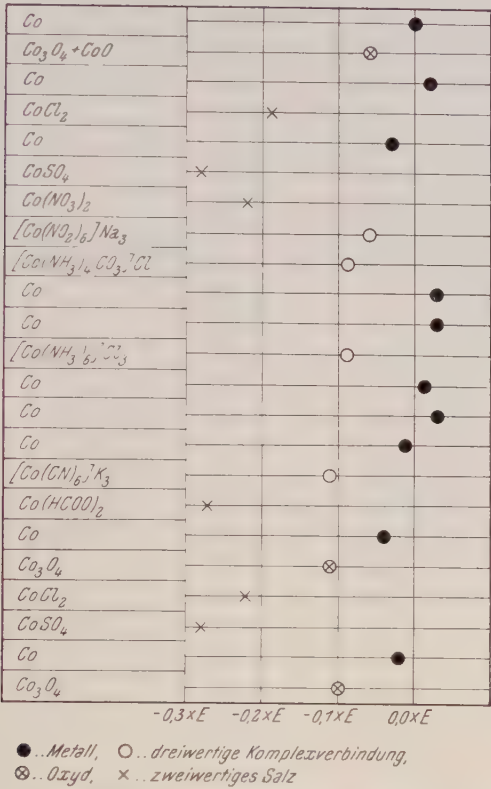


Abb. 8. Verschiebung der Co Kβ₁-Linie verschiedener Kobaltverbindungen

Daß die durch den Wellenlängenunterschied infolge chemischer Bindung hervorgerufene Glanzwinkelverschiebung auch mit freiem Auge sichtbar ist, soll Abb. 7 beweisen. Das Ergebnis aller Aufnahmen ist übersichtlich in Abb. 8 dargestellt. Es ergibt sich aus den zehn Aufnahmen des Kobaltmetalls, die in Abständen von einer Woche bis zu einem Monat angefertigt wurden, daß der mittlere Fehler vom Mittelwert

$$\delta = \sqrt{\frac{[v \bar{v}]}{n(n-1)}}$$

- δ = mittlerer Fehler vom Mittelwert,
- [v v] = Summe der Fehlerquadrate der Einzelmessungen,
- n = Anzahl der Einzelmessungen

± 0,01 XE, der maximale Fehler vom Mittelwert ± 0,04 XE beträgt.

Diese hohe Genauigkeit trotz Umänderungen an der Apparatur usw. ist wohl hauptsächlich auf die Verwendung eines Einstellmikroskops für

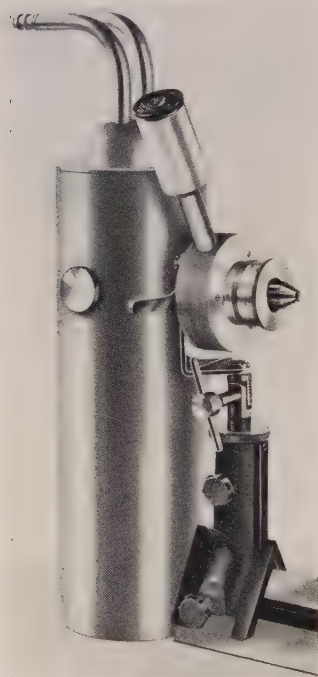


Abb. 9. Einstellmikroskop an einer Röntgenröhren-Attrappe. Herstellerfirma: Austria, Solbad Hall/Tirol

die reproduzierbare Einhaltung des Abstandes Kamera-Probe zurückzuführen. Dieses Mikroskop, das in Abb. 9 zu sehen ist, wird an Stelle der Kamera an der Röntgenröhre befestigt. Die Tiefenschärfe ist bei der rund 60-fachen Vergrößerung gering. Immer, wenn bei festgehaltenem Objektivauszug die Probe scharf erscheint, ist der einmal gewählte Präparatabstand wieder hergestellt.

Der maximale Fehler von $\pm 0,04$ ist wesentlich geringer als der mit klassischen Röntgenspektrographen bei der Untersuchung von Bindungsabhängigkeit im gleichen Wellenlängenbereich übliche [8] und wird nur vom Doppelkristallspektrometer noch erreicht [9]. Außerdem liegen nun von Kobalt und seinen Verbindungen eine größere Zahl von Ergebnissen vor, die zu gewissen Schlüssen berechtigen, ähnlich, allerdings bei weitem nicht auf so breiter Basis, wie sie von A. FAESSLE im Falle des Emissionsspektrums von Schwefel oder von O. STELLING für das Absorptionsspektrum des Chlors angegeben wurden [4, 10, 11].

Für die Kobalt $K\beta_1$ -Linie lehrt die Übersicht der Abb. 8, daß alle zwei-

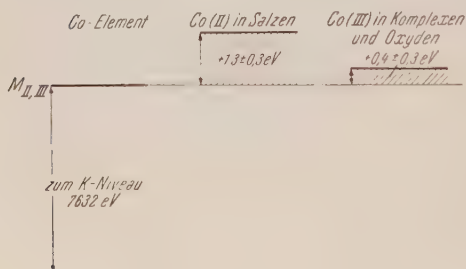


Abb. 10. Verlagerung des $M_{II,III}$ -Niveaus infolge chemischer Bindung bei Kobaltverbindungen

wertigen Salze eine Verschiebung um fast 0,3 XE nach kürzeren Wellenlängen gegenüber dem Element aufweisen. Die dreiwertigen Komplexe und die Oxyde hingegen ergeben alle eine Verschiebung in der gleichen Richtung um rund 0,1 XE. Für das $M_{II,III}$ -Niveau, aus dem die $K\beta_1$ -Linie stammt, führt das zu der in Abb. 10 wiedergegebenen Ver-

lagerung, nämlich, daß dieses wenn man das K-Niveau als fest annimmt, um rund $1,3 \pm 0,3$ bzw. $0,4 \pm 0,3$ eV nach höheren Energien verlagert ist.

Wenn auch die Zahl der experimentellen Einzelergebnisse keineswegs zur Fundierung einer Theorie ausreicht, so scheint es doch plausibel

laß bei der mehr ionogenen Bindung der Salze das Kobalt um zwei Elektronen verarmt ist und der Rumpf daher eine höhere Energie repräsentiert. Bei Oxiden und Komplexen tritt bekanntlich der ionogene

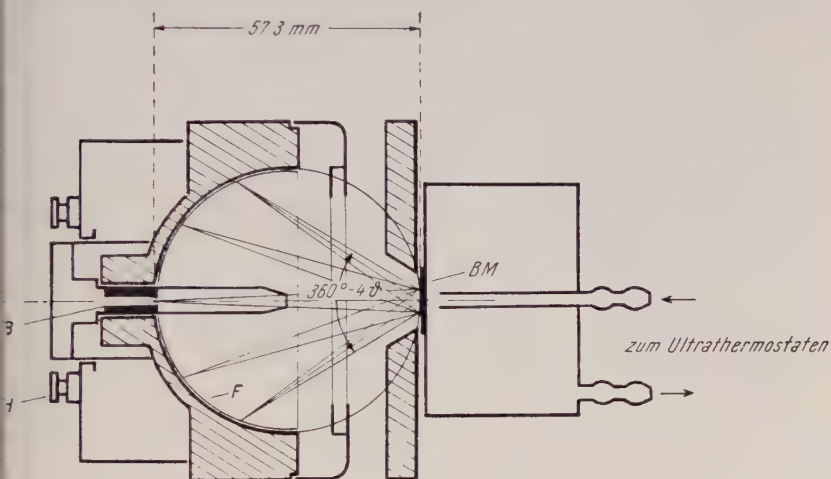


Abb. 11. Versuchsanordnung unter Verwendung der REGLERSchen Ringfilmkamera.

G = Einsteckblende, H = Halteschrauben zur Befestigung der Kamera, F = Film, BM = Beugungsmittel, am Temperiergefäß angebracht

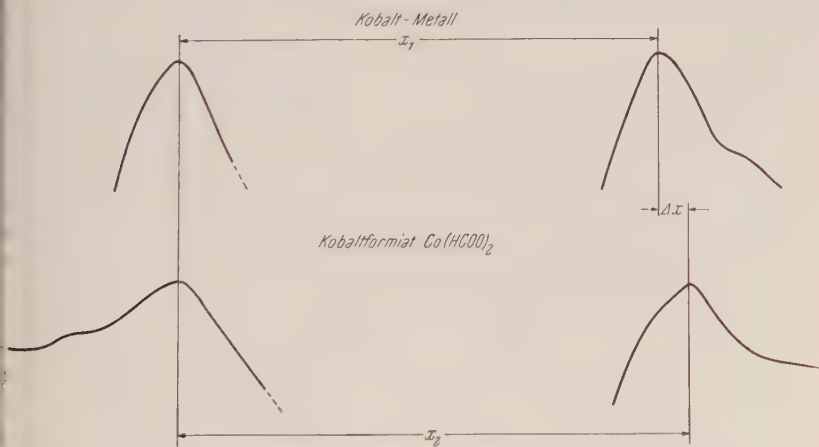


Abb. 12. Mikrophotometerkurven der Ringfilmaufnahmen von Kobalt und Kobaltformiat

Charakter der Bindung zurück, daher ist auch die Verschiebung nach kürzeren Wellenlängen, das heißt die Verlagerung des M_{II} M_{III} -Niveaus geringer.

Vereinfachung der Apparatur

Die geschilderten Serienmessungen hatten gezeigt, daß der Effekt der chemischen Bindung bei den vorliegenden Versuchsbedingungen

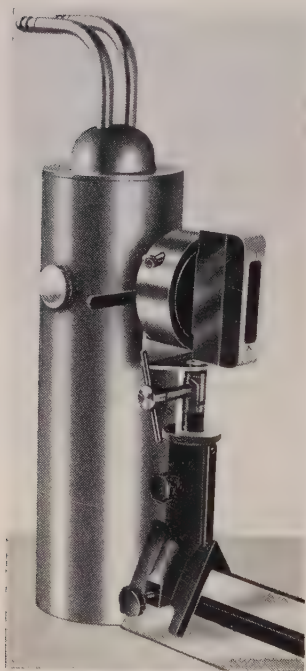


Abb. 13. REGLERSche Ringfilmkamera an einer Röntgenröhren-Attrappe. Herstellerfirma: Austrix Solbad Hall/Tirol

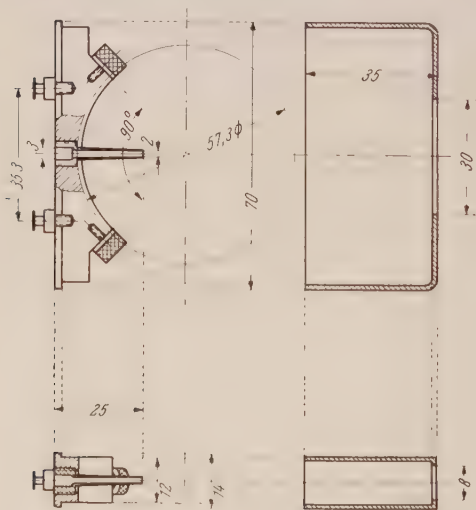


Abb. 14. Spezielle Ringfilmkamera für die Untersuchung der Bindungsabhängigkeit

eindeutig und wiederholbar zu messen ist. Es konnte daher das Planfilmrückstrahlverfahren durch das zweckmäßigere und geringere Belichtungszeiten erfordernde Ringfilmverfahren nach F. H. REGLER [12] ersetzt werden. Dabei verkürzt sich der Abstand der Blende vom Film auf den durch die Kamera gegebenen Wert des Krümmungsradius (Abb. 11). Das Planfilmverfahren war ursprünglich nur gewählt worden, weil ein an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegender Effekt eventuell durch Vergrößerung des Abstandes registrierbar geworden wäre.

Wiederholung einiger Aufnahmen mit der Ringfilmkamera ergab keinen Verlust an Genauigkeit, da mit abnehmen dem Abstand Blende—Film wohl der Meßeffect sich verkleinert, die Linien aber gleichzeitig an Schärfe gewinnen und besser photometrierbar werden. Die Belichtungszeiten verkürzen sich dabei auf weniger als die Hälfte gegenüber den entsprechenden Aufnahmen nach dem Verfahren der Abb. 3. In der Abb. 12 sind die

Mikrophotometerkurven von Kobaltmetall- und Kobaltformiat-Aufnahmen wieder gegeben, die mit der fokussierenden, drehbaren Ringfilmkamera hergestellt worden waren (Abb. 13). Diese Kamera ist jedoch für den Gebrauch bei der Bestimmung von Gitterdaten und Gitterverzerrungen gedacht [13, 14]. Für die Untersuchung der Bindungsabhängigkeit, bei der nur die Glanzwinkel ganz in der Nähe von 90° in Betracht kommen, läßt sich die Kamera beträchtlich vereinfachen. Abb. 14 zeigt die Konstruktion einer solchen speziellen Kamera, während auf Abb. 15 diese Ringfilmkamera neben

einer Streichholzschachtel zu sehen ist. Zum Vergleich ist ein klassischer Einkristallspektrograph mit einer Streichholzschachtel in Abb. 16 wieder-



Abb. 15. Ringfilmkamera für Bindungsabhängigkeit neben einer Streichholzschachtel

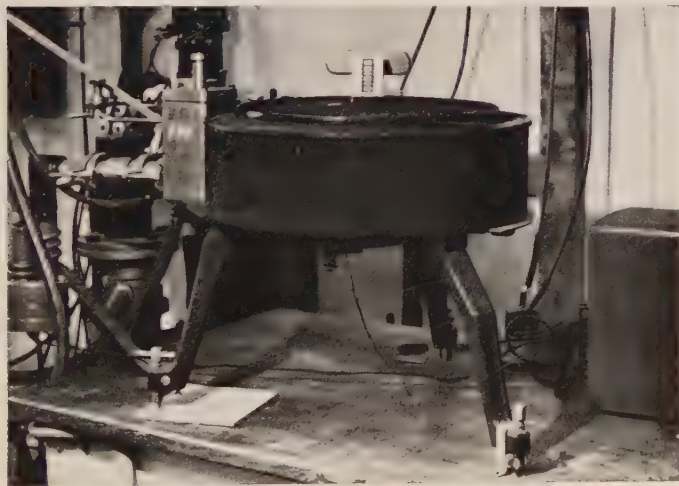


Abb. 16. Röntgenspektrograph in Vakuumtrommel, verglichen mit einer Streichholzschachtel

gegeben. Bedenkt man, daß mit der Ringfilmkamera höhere Genauigkeit bei der Untersuchung der Bindungsabhängigkeit des Röntgenspektrums

erzielt werden konnte als mit großen Röntgenspektrographen, so scheint einem Charakterzug der Arbeitsweise österreichischer Forschung Rechnung getragen zu sein, nämlich mit geringstem Aufwand genaue Ergebnisse zu erzielen.

Es ist uns ein Bedürfnis, unserem verehrten Institutsvorstand, Herrn Prof. Dr. F. REGLER, an dieser Stelle für die in jeder Weise gewährte Förderung zu danken.

Tabelle 1. Gitterkonstanten, die die Co-K β_1 -Strahlung ($\lambda = 1,6175 \text{ \AA}$) bei 87° beugen, und ihre Realisierung (s. a. Abb. 5).

1 $(h_1 h_2 h_3)$	2 Σh_i^2	3 a aus Abb. 5 (\AA)	4 Gitterkonstanten von Elementen, die dem a aus Spalte 3 ähnlich sind (\AA)	5 Zweistoffsysteme, in deren Gitterkonstanten- bereich a aus Spalte 3 enthalten ist
(111)	3	1,4027		
(002)	4	1,6197		
(022)	8	2,2907		
(113)	11	2,6861		
(222)	12	2,8055		
(004)	16	3,2395		
(133)	19	3,5302	Ni = 3,5169	Ni — Pd Ni — Pt Ni — Cu
(024)	20	3,6219	Cu = 3,6080 Ir = 3,8312	Cu — Au Ni — Pd Ni — Pt
(224)	24	3,9676	Pd = 3,8817 Pt = 3,9158	Pd — Ag Pd — Au Au — Cu
(333) (115)	27	4,2082	Al = 4,0407 Au = 4,0700 Ag = 4,0778	
(044)	32	4,5814		
(135)	35	4,7913		
(006) (244)	36	4,8592		

Literatur

1. HERGLOTZ, H., Anz. d. Österr. Akad. d. Wiss., Math. naturw. Klasse 90 36 (1953).
2. SWINNE, R., Phys. Z. 17, 481 (487) (1916); s. a. HJALMAR, E., Z. Phys. 1, 439 (1920) und WENTZEL, G., Naturwiss. 10, 464 und 614 (1922).

3. BERGENGREN, J., Z. Phys. **3**, 247 (1920); Compt. Rend. **171**, 624 (1920).
4. HERGLOTZ, H., Einflüsse der Bindung auf das Röntgenspektrum, Abhandlungen des Dokumentationszentrums f. Technik u. Wirtschaft, Heft 13, Wien 1952.
5. HEVESY, G. V., J. BÖHM und A. FAESSLER, Z. Phys. **63**, 74 (1930).
6. ALEXANDER, E. und A. FAESSLER, Z. Phys. **68**, 260 (1931).
7. HINTEREGGER, H., Acta Phys. Austr. **5**, 496 (1952).
8. TANAKA SHINSUKE und GENJIRO OKUNO, Jap. J. Phys. **9**, 75 (1934) und **0**, 1 (1935).
9. BEARDEN, J. A. und H. FRIEDMANN, Phys. Rev. [2] **58**, 387 (1940).
10. STELLING, O., Z. Phys. Chem. B **24**, 282 (1934).
11. FAESSLER, W. und M. GOEHRING, Naturwiss. **39**, 169 (1952).
12. REGLER, F., Z. techn. Phys. **24**, 291 (1943).
13. REGLER, F., Röntgen-Feinstrukturuntersuchung von Metallen, Aluminium-Ranshofen Mitteilungen, Sonderheft 1, Juni 1954.
14. NACHTIGALL, E., F. REGLER und H. HERGLOTZ, Verformung von Aluminiumwerkstoffen; Technologische Eigenschaften und Röntgen-Feinstrukturuntersuchung, Aluminium-Ranshofen Mitteilungen, Sonderheft 2, Januar 1955.

Pressure Distribution on a Wall under Impact of a Subsonic Gas Jet

By

H. Roth

Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland,
College Park, Maryland

With 2 Figures

(Received August 12, 1955)

Introduction and Summary

The solution of the problem of the head-on impact of an incompressible jet upon an infinite wall has been generalized to give the flow for a jet of compressible fluid. As an example for the use of the method computations have been carried out to find the pressure distribution on the wall for a jet with MACH number $M = 0.826$ at infinity upstream. A comparison has been made of the pressure at the wall for compressible and incompressible flow.

1. Generalization of the Incompressible Flow Problem to the Problem for Compressible Flow

Let x and y be rectangular Cartesian coordinates. Consider a low-speed (incompressible) potential flow impinging directly onto an infinite plane wall (the plane $x = 0$, Fig. 1); let the flow have a uniform velocity U at $x = -\infty$. Let Φ be the velocity potential and Ψ the streamfunction. If then

$$z = x + iy, \quad w = \Phi + i\Psi, \quad \zeta = q e^{-i\theta} = dw/dz, \quad (1)$$

q being the resultant velocity and θ the inclination of the flow to the x -axis, w may be expressed as a function of ζ . For the problem outlined above w may be expanded in a series of the form

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (\zeta/U)^n; \quad (2)$$

if ζ is replaced by its value from (1), and d_n given its numerical value for the problem in question, we have

$$w = -K \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-1} (q/U)^{2(2n-1)} e^{-2(2n-1)i\theta}, \quad (3)$$

here $K = 4 U h \pi$ is a scale-factor, h being the half-width of the jet at infinity.

In a paper by M. J. LIGHTHILL¹ on the hodograph transformation from low-speed to high-speed flow the following rule is given: Suppose the low-speed flow may be found from the series expansion (2), then the "corresponding" high-speed flow may be found by taking the stream-function of the high-speed flow to be the imaginary part of a function

$$V = \sum d_n f_n(\tau_1) \Psi_n(\tau) e^{-i\theta}, \quad (4)$$

where $\tau = q^2/q_M^2$ is the non-dimensional speed, q_M being the (theoretical) greatest possible value of q corresponding to the local velocity of sound $c = 0$, and τ_1 is the "velocity" at infinity upstream supposed subsonic; $\Psi_n(\tau) = \tau^{n/2} F_n(\tau)$, where $F_n(\tau)$ is the hypergeometric function defined by

$$F_n(\tau) = 1 + \frac{a_n b_n}{1!(n+1)} \tau + \frac{a_n b_n (a_n + 1) (b_n + 1)}{2!(n+1) (n+2)} \tau^2 + \dots,$$

for $0 \leq \tau < 1$, and $a_n + b_n = n - \beta$, $a_n b_n = -\frac{1}{2} \beta n(n+1)$;
 $\beta = (\gamma - 1)^{-1}$ and $\gamma = 1.4$ for air.

The function $f_n(\tau_1)$ is chosen so that (4) reduces to (3) when $q_M \rightarrow \infty$ and τ and $\tau_1 \rightarrow 0$, i.e. (since $\Psi_n(\tau) \sim \tau^{n/2}$ as $\tau \rightarrow 0$) so that $f_n(\tau_1) \sim \tau^{-n/2}$ as $\tau_1 \rightarrow 0$; this process is equivalent to taking the compressible flow to the limit of the incompressible flow.

M. J. LIGHTHILL has also introduced two quantities

$$\sigma = -\tau_s^{-\frac{1}{2}} \tanh^{-1}(\tau_s^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} \log(\beta/2),$$

$$s = \sigma + \tau_s^{-\frac{1}{2}} \tanh^{-1} \left(\frac{\tau_s - \tau}{1 - \tau} \right)^{\frac{1}{2}} - \tanh^{-1} \left(\frac{1 - \tau/\tau_s}{1 - \tau} \right)^{\frac{1}{2}},$$

where σ is the value of s at $\tau = \tau_s$, τ_s indicating the value of τ at sonic speed. $s \rightarrow -\infty$ as $\tau \rightarrow 0$.

We should like to have the behaviour of the series (4) near $\tau = \tau_1$ to be similar to that of the series (3) near $q = U$. The asymptotic formula for $\Psi_n(\tau_1)$,

$$\Psi_n(\tau_1) = V(\tau_1) e^{nS_1} [1 + O(1/n)], \quad V(\tau_1) = \left[\frac{(1 - \tau_1)^{2\beta+1}}{1 - \tau_1/\tau_s} \right]^{\frac{1}{2}},$$

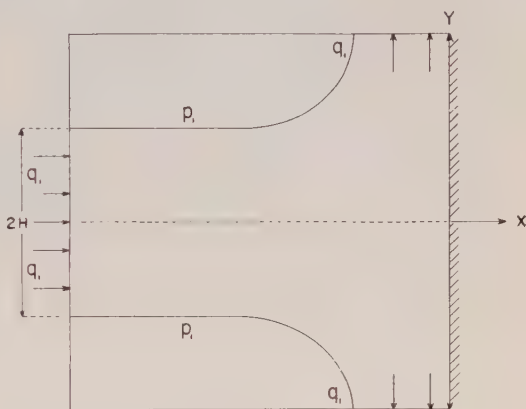


Fig. 1

is a relation, holding, as $|n| \rightarrow \infty$, uniformly for $0 < \tau \leq \tau_s - \varepsilon$ and for n in the whole complex plane $|n + m| \geq \delta$, for all non-negative integers m , δ and ε being any two arbitrarily small positive numbers.

If for large n , $f_n(\tau_1)$ behaves like a function of τ_1 multiplied by e^{-ns_1} , it follows from the asymptotic formula for $\Psi_n(\tau_1)$ that the series (4) will behave like (3) near $q = U$. But the simplest function satisfying these requirements on $f_n(\tau_1)$ is e^{-ns_1} .

In the classic paper by CHAPLYGIN [2] this function was put equal to $1/\Psi_n(\tau_1)$. In the problem under discussion in the present paper, this CHAPLYGIN form of $f_n(\tau_1)$ had to be chosen; it gives a constant value of Ψ for $\tau = \tau_1$, and thus preserves the free streamlines bounding the jet. Other forms for $f_n(\tau_1)$ lose this essential feature of a jet flow. With $f_n(\tau_1) = 1/\Psi_n(\tau_1)$, (4) will give for the high-speed flow:

$$W = -\bar{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{4n-2}(\tau) \exp[-(4n-2)i\theta]}{(2n-1)\Psi_{4n-2}(\tau_1)}$$

or, what is the same

$$W = -\bar{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{4n-2}(\tau) [\cos(4n-2)\theta - i \sin(4n-2)\theta]}{(2n-1)\Psi_{4n-2}(\tau_1)}. \quad (5)$$

2. Determination of the Rectangular Coordinates in the Plane of the High-Speed Flow

Now we have to find the position coordinates x and y in the plane of the high-speed flow. The potential and streamfunction are both functions of τ and θ . Differentiating them totally, we have

$$d\Phi = \Phi_\theta d\theta + \Phi_\tau d\tau, \quad d\Psi = \Psi_\theta d\theta + \Psi_\tau d\tau.$$

But [3]

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{q} \left(d\Phi + \frac{i q_0}{\varrho} d\Psi \right), \quad \varrho = \varrho_0(1-\tau)^\beta, \quad q = \tau^{\frac{1}{2}} q_M, \quad (6)$$

ϱ_0 being the stagnation density of the gas. Substitution of the values for $d\Phi$ and $d\Psi$ into (6) gives

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{\tau^{\frac{1}{2}} q_M} \{ [\Phi_\theta + i(1-\tau)^{-\beta} \Psi_\theta] d\theta + [\Phi_\tau + i(1-\tau)^{-\beta} \Psi_\tau] d\tau \}.$$

Corresponding to the term $\Psi = \Psi_v(\tau) \sin(\nu\theta)$ we have the potential

$$\Phi = -\frac{2\tau}{\nu(1-\tau)^\beta} \cos(\nu\theta) \Psi_v'(\tau).$$

Putting

$$\Phi_0 = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \sin(\nu\theta) \Psi_v'(\tau), \quad \Psi_\theta = \Psi_v(\tau) \nu \cos(\nu\theta)$$

to the equation for dz , we have on integration

$$z = x + i y = \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}} q_M (1 - \tau)^{\beta}} \Psi_v(\tau_1) \left\{ \frac{\exp[i(\nu \theta + \theta)]}{\nu + 1} \left(\frac{\nu}{2} \Psi_v(\tau) - \right. \right. \\ \left. \left. - \tau \Psi_v'(\tau) - \frac{\exp[-i(\nu \theta - \theta)]}{\nu - 1} \left(\frac{\nu}{2} \Psi_v(\tau) + \tau \Psi_v'(\tau) \right) \right\}. \quad (7)$$

the wall $x = 0$ and $\theta = \pi/2$. Applying (7) to (5) we find

$$\gamma_{compr.} = \overline{K} \frac{2}{\tau^{\frac{1}{2}} q_M (1 - \tau)^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{4n-2}(\tau) + 2 \tau \Psi_{4n-2}'(\tau)}{(4n-1)(4n-3) \Psi_{4n-2}(\tau_1)}. \quad (8)$$

3. Numerical Analysis for $M = 0.826$ and Transformation of Equation (8)

For the speed at infinity $\tau_1 = .12$ was chosen, corresponding to each number $M = 0.826$, approximately. The values of $\gamma_{compr.}$ were computed for the values of τ given in Table I.

Table I.

M	τ	p_c/p_1	y_c/H	p_i/p_1	y_i/h
0	0	1.5643	0	1.5643	0
.319	.02	1.4575	.350	1.4702	1.046
.456	.04	1.3560	.490	1.3762	1.506
.565	.06	1.2597	.604	1.2821	1.906
.659	.08	1.1683	.716	1.1881	2.332
.745	.10	1.0818	.828	1.0940	2.908
.786	.11	1.0403	.938	1.0470	3.410
.826	.12	1.0000	∞	1.0000	∞

Since $[\Psi]_{\tau=\tau_1}^{\tau=H} = (\pi/2) \overline{K}$, and ϱ_0 is the stagnation density in the incompressible jet,

$$[\Psi]_{\tau=\tau_1}^{\tau=H} = \int d\Psi = \int (\Psi_x dx + \Psi_y dy);$$

and since [3]

$$\varrho u = \varrho_0 \Psi_y, \quad \varrho v = -\varrho_0 \Psi_x, \\ \int d\Psi = \frac{1}{\varrho_0} \int \varrho (u dy - v dx) = \frac{\varrho_1 q_1 H}{\varrho_0}, \quad (9)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} \overline{K} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} q_1 H, \quad (10)$$

where H is the half-orifice in the compressible flow. Thus $\bar{K} = K \varrho_1/\varrho_0$, comparing a compressible and an incompressible jet with the same volume discharge per unit time; $\varrho_1/\varrho_0 = (.88)^{5/2}$ from (6) for the chosen τ_1 . The values of the functions $\Psi_{4n-2}(\tau)$ and $\Psi'_{4n-2}(\tau)$ were taken from the tables, computed by D. F. FERGUSON and M. J. LIGHTHILL [4], and q_M was taken to equal unity.

The choice of $\tau_1 = .12$ necessitated taking ten terms of the series to ensure that the second decimal place in y was guaranteed. The tables just mentioned, however, do not include suffices $\nu > 15$; to take in ten terms of the series requires the values of the functions Ψ_ν, Ψ'_ν up to $\nu = 38$, since $\nu = 4n - 2$. To save computational labor we used the results and tables given in a paper by T. M. CHERRY [5]. CHERRY finds developments in BESSEL functions which are of the following form:

$$\begin{aligned}\chi_\nu(\tau) &\sim N \left(\frac{\nu}{h_\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left[J_\nu(\nu t) \left(1 + \frac{q_2}{\nu^2} + \frac{q_4}{\nu^4} + \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + t J'_\nu(\nu t) \left(\frac{q_1}{\nu} + \frac{q_3}{\nu^3} + \dots \right) \right], \\ \frac{2}{\nu} \chi'_\nu(\tau) &\sim N \left(\frac{\nu}{h_\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left[J_\nu(\nu t) \left(\frac{q_1^*}{\nu} + \frac{q_3^*}{\nu^3} + \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + t J'_\nu(\nu t) \left(q_0^* + \frac{q_2^*}{\nu^2} + \frac{q_4^*}{\nu^4} + \dots \right) \right],\end{aligned}\quad (11)$$

where the functions $\chi_\nu(\tau)$ and $\chi'_\nu(\tau)$ are related to the functions $\Psi_\nu(\tau)$ and $\Psi'_\nu(\tau)$ by the transformation:

$$\begin{aligned}(\nu - 1)(1 - \tau)^{-\beta} \Psi_\nu(\tau) &= \nu \chi_\nu(\tau) - 2\tau \chi'_\nu(\tau)/\nu, \\ (\nu + 1)(1 - \tau)^\beta \chi_\nu(\tau) &= \nu \Psi_\nu(\tau) + 2\tau \Psi'_\nu(\tau)/\nu.\end{aligned}\quad (12)$$

In (11): $N = (1 - \tau)^{(1-2\beta)/4} \left(\frac{1 - t^2}{1 - \tau_s \tau_s} \right)^{\frac{1}{2}}$, whereas t is related to τ by

$$\tanh^{-1}(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} = \tanh^{-1} \left[\frac{1 - \tau/\tau_s}{1 - \tau} - \tau_s^{-\frac{1}{2}} \tanh^{-1} \right] \frac{\tau_s - \tau}{1 - \tau}$$

$$h_\nu = \frac{\Gamma(1 + a_\nu) \Gamma(\nu - b_\nu)}{\Gamma(1 + a_\nu - \nu) \Gamma(-b_\nu) \Gamma(1 + \nu) \Gamma(\nu)}.$$

$$a_\nu = \frac{1}{2} [\nu - \beta + \sqrt{(1 + 2\beta)\nu^2 + \beta^2}],$$

$$b_\nu = \frac{1}{2} [\nu - \beta - \sqrt{(1 + 2\beta)\nu^2 + \beta^2}],$$

and finally, J_ν is the BESSEL function of the first kind of order ν . Taking (12) into consideration, (8) will go over into

$$y_{\text{compress.}} = \bar{K} \frac{4\tau^{\frac{1}{2}}}{q_M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi'_{4n-2}(\tau)}{(4n-2)(4n-3)\Psi_{4n-2}(\tau_1)}. \quad (13)$$

The quantities q_0^*, q_1, \dots, q_4^* ; t , are tabulated in CHERRY's paper whereas N and h_ν were computed.

Formula (13) was used to find the contributions to y from the terms ≥ 5 .

Now, if A_r is the r -th term of the series development in y , we observe at the ratios between consecutive terms are such that

$$A_2/A_1 < A_3/A_2 < \dots < A_r/A_{r-1} \rightarrow e^{-4(s_1-s)}, \text{ as } r \rightarrow \infty.$$

the sum of the series

$$S_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_{r_0}(1 + e^{-4(s_1-s)} + e^{-8(s_1-s)} + \dots)$$

greater than that of the series of positive terms giving $y_{\text{compr.}}/\bar{K}$. the sum of the series

$$S_2 = A_1 + A_2 + \dots + A_{r_0}(1 + A_{r_0}/A_{r_0-1} + A_{r_0}^2/A_{r_0-1}^2 + \dots)$$

less than $y_{\text{compr.}}/\bar{K}$. We seek a value of $r = r_0$ (say), such that $|S_2 - S_1|$ is a small quantity, i.e. a quantity which is negligible with respect to the number of decimal places desired. In the present problem, retaining accuracy to two decimal places, the second decimal place in y was secured by carrying out the computations to $n = 10$.

The pressure corresponding to a given velocity is obtained from the formula

$$p/p_1 = \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_1} \right)^{7/2}. \quad (14)$$

4. Comparison of the Pressures for Incompressible Flow and Compressible Flow at the Wall

From the known formula [6]

$$z = x + iy = (2h/\pi) \left(\log \frac{q_1 - \zeta}{q_1 + \zeta} + i \log \frac{q_1 + i\zeta}{q_1 - i\zeta} \right) \quad (15)$$

for incompressible flow, where q_1 is the speed at infinity and $\zeta = q e^{-i\theta}$; with $\theta = \pi/2$, we find easily

$$y_{\text{incompr.}} = (8h/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1)^{-1} (q/q_1)^{4n+1}. \quad (16)$$

5) gives the velocity distribution at the wall for incompressible flow. For the calculation of $y_{\text{incompr.}}$, a sufficient number of terms was taken to ensure the second decimal place. $y_{\text{incompr.}}/h$ is tabulated in Table I. Further, by BERNOULLI's law

$$p + \frac{1}{2} \rho q^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho q_1^2, \quad (17)$$

the ratio of any pressure to the pressure at infinity

$$p/p_1 = 1 + (\frac{1}{2} \rho q_1^2/p_1) (1 - q^2/q_1^2). \quad (18)$$

we require the stagnation pressure ratio to be the same for the compressible and incompressible cases, then

$$(p_0)_{\text{incompr.}}/p_1 = 1 + (\frac{1}{2} \rho q_1^2/p_1) = 1/(1 - \tau_1)^{7/2} = (p_0)_{\text{compr.}}/p_1, \quad (19)$$

where p_0 denotes the stagnation pressure. The values p/p_1 for varying τ_1 from (14), as well as those from (18), are given in Table I. These

relations permit us to compare the fall of pressure ratios of compressible and incompressible flows with the same value of p_0/p_1 .

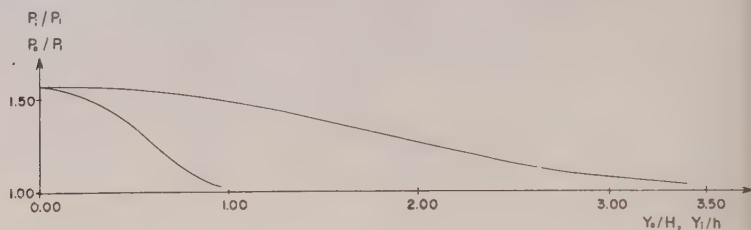


Fig. 2

In Figure 2, p_i/p_1 and p_c/p_1 have been plotted against y_i/h and y_c/h . The short curve represents the fall of pressure for the compressible flow, showing that the pressures in the compressible flow fall off much more rapidly than those in the incompressible flow (long drawn curve). This behaviour results from the fact that, given the pressures p_1 and p_0 , $p_1/p_0 < 1$, there is more momentum in an incompressible jet.

The author wishes to express his deep appreciation to Dr. D. C. PACE who introduced him to the subject and gave kind advice at all times.

References

1. M. J. LIGHTHILL, Proceedings of the Royal Society, Series A, **191**, 352, 1946.
2. S. CHAPLYGIN, Scientific Mem., Moscow University, 1902.
3. L. M. MILNE-THOMSON, Theoretical Hydrodynamics, p. 555, 1950.
4. D. F. FERGUSON and M. J. LIGHTHILL, Proceedings of the Royal Society, Series A, **192**, 135 (1948).
5. T. M. CHERRY, Asymptotic expansions for the hypergeometric function occurring in gas-flow-theory, Proceedings of the Royal Society, Series A, **203**, 507 (1950).
6. L. M. MILNE-THOMSON, Theoretical Hydrodynamics, p. 277, 1950.

This study was sponsored by the Air Research and Development Command under Contract OAR-AF 18(600)86.

Zur experimentellen Prüfung der wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission

Von

R. Haefer, Vaduz-Liechtenstein

Mit 7 Abbildungen

(Eingelangt am 13. September 1955)

Zusammenfassung

Bei einer früheren experimentellen Untersuchung [6] zur Prüfung der wellenmechanischen Tunneleffekttheorie der Feldelektronenemission bestand die Schwierigkeit, daß die elektrische Feldstärke und die Stromdichte am Scheitel der übermikroskopisch abgebildeten Kathodenspitzen nicht mit der gewünschten Genauigkeit ermittelt werden konnten, da die wirklichen Formen der Spitzen von derjenigen des theoretisch angenommenen Rotationshyperboloids abweichen. Durch Anwendung einer kürzlich von DRECHSLER und HENKEL [4] ausgearbeiteten Methode ist es nun möglich, die Feldstärke und die Stromdichte am Scheitel der Spitzen zu berechnen und somit zu zeigen, um welche Beträge die früher experimentell ermittelten Konstanten des Feldemissionsgesetzes korrigiert werden müssen. Die auf diese Weise erhaltenen Korrekturgrößen sind aber so bemessen, daß das früher erzielte Ergebnis [6] der Gültigkeit der unter Berücksichtigung der Bildkraft gewonnenen wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission sowohl bei reinen wie bei mit Fremdatomen bedeckten Kathoden aufrechterhalten bleibt.

Einleitung

Vor mehreren Jahren wurde vom Verfasser die wellenmechanische Tunneleffekttheorie der Feldelektronenemission experimentell bestätigt [6]. In dieser Untersuchung wurde zur Ermittlung der Gestalt der im allgemeinen sublichtmikroskopisch feinen Wolframspitzen erstmalig das Übermikroskop herangezogen und durch Vermessung der übermikroskopischen Aufnahmen die wirksame elektrische Feldstärke am Scheitel der Spitzen berechnet. Diese Berechnung erfolgte in der Weise, daß die Spitze (mit Rücksicht auf die Versuchsanordnung Kathodenspitze — ebene Anode) zu einem Rotationshyperboloid idealisiert wurde, dessen Scheitelfeldstärke mit Hilfe einer aus der Elektrostatik bekannten Formel [12] ermittelt werden kann. Nun weichen aber die Formen der Kathodenspitzen meistens stark von der eines Rotationshyperboloids ab. Wählt man das Rotationshyperboloid derart,

daß es am Scheitel den gleichen Krümmungsradius besitzt wie die Spitze, so berechnet man einen zu niedrigen Wert der Scheitelfeldstärke, weil ein solches Hyperboloid in größerer Entfernung vom Scheitel breiter als die Spitze ist. Aus diesem Grunde wurde zur Berechnung der Scheitelfeldstärke ein „schlankeres“ Rotationshyperboloid angenommen, das am Scheitel einen kleineren Krümmungsradius als die Kathodenspitze hat. Die in dieser Hinsicht getroffene Wahl wird durch die Abb. 1a und 2a veranschaulicht. Daß die Kathodenspitzen mit den in diesen beiden Abbildungen mit eingezeichneten Hyperboloiden hinsichtlich der Scheitelfeldstärken annähernd äquivalent sind, wurde durch Versuche im elektrolytischen Trog kontrolliert.

Zur Prüfung der Theorie der Feldelektronenemission aber muß außer der Feldstärke noch die Stromdichte ermittelt werden. Wird nun die Feldstärke am Scheitel der Spitze gemessen, so hat das gleiche auch für die Stromdichte zu gelten. Um die Stromdichte am Scheitel aus dem gemessenen Gesamtstrom und den Abmessungen der Spitze bestimmen zu können, ist die Kenntnis des Verlaufes der Feldstärke längs der Kathodenoberfläche erforderlich. Dieser Feldstärkeverlauf war aber bisher rechnerisch nicht zu ermitteln. Daher mußte der Faktor, um den die Stromdichte am Scheitel höher als die mittlere aus Gesamtstrom und Kalottenfläche berechnete Stromdichte ist, auf Grund des Verlaufes der Helligkeit des Leuchtschirmbildes beim Feldelektronenmikroskop nach E. W. MÜLLER [8, 10] geschätzt werden.

Inzwischen ist von DRECHSLER und HENKEL [4] eine Methode ausgearbeitet worden, die die Berechnung des Feldstärkeverlaufes bei praktisch allen im Experiment vorkommenden Spitzenformen gestattet soweit diese nur rotationssymmetrisch sind. Durch Anwendung dieser Methode ist nun eine Möglichkeit gegeben, die früher in [6] ermittelten Werte von Feldstärke und Stromdichte und damit die früher vollzogene Bestimmung der Konstanten der Feldemissionsgleichung auf rechnerischem Wege einer Nachprüfung zu unterziehen. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden Mitteilung. Im ersten Teil der Arbeit werden wir uns mit der Feldelektronenemission in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke bei reinen Wolframspitzen befassen und im zweiten Teil mit der Feldelektronenemission in ihrer Abhängigkeit von der Austrittsarbeit bei mit Fremdatomen bedeckten Wolframspitzen.

I. Feldelektronenemission in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke

1. Bestimmung der Scheitelfeldstärke

DRECHSLER und HENKEL berechnen durch Superposition der Potentiale eines Hyperboloids und einer Kugel Äquipotentialflächen, die möglichen Spitzenformen entsprechen. Dabei wird angenommen, daß Kugelmittelpunkt und Mittelpunkt des Krümmungskreises am Scheitel des Hyperboloids zusammenfallen. Bei gegebenem Krümmungsradius r unterscheiden sich die verschiedenen Spitzenformen durch die Größe

des Formfaktors α , der den Anteil des Kugelfeldes an der gesamten Feldstärke F_0 am Scheitel angibt. Es ist also

$$F_0 = (1 - \alpha) F_{Hyp.} + \alpha F_{Kug.} = U \left(\frac{1 - \alpha}{r} \ln \frac{4d}{r} + \frac{\alpha}{r} \right) \quad (1)$$

Hier ist U die Anodenspannung und d der Abstand Scheitel — ebene Anode. Wir kürzen den Klammerausdruck rechts in (1) durch k ab und schreiben

$$F_0 = k \cdot U \quad (1a)$$

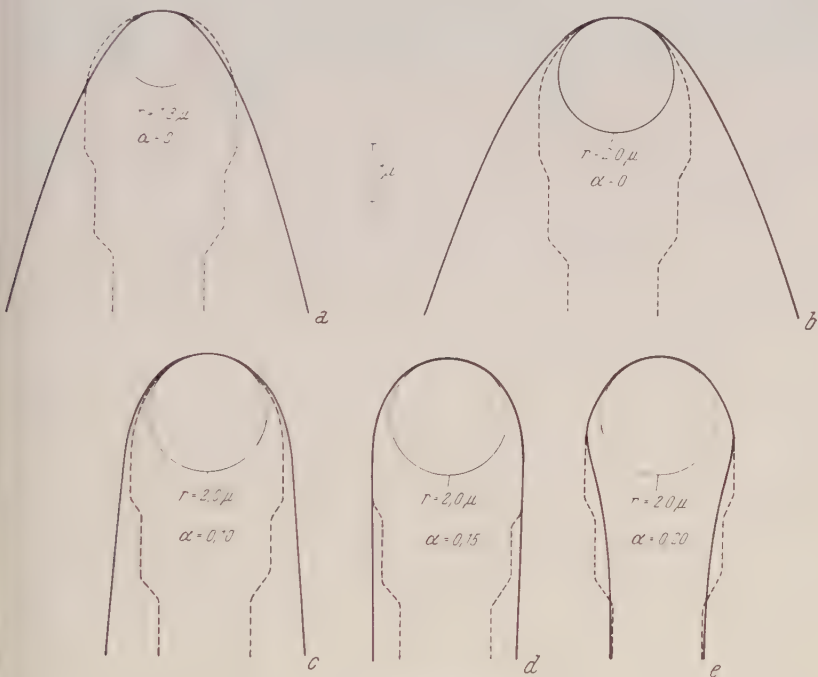


Abb. 1. — — — — Wolframspitze Nr. 12 durch Schmelzen geglättet, nach Abb. 8 Z. f. Phys. **116**, 614, 1940
 — — — — Rotationshyperboloide: a) Krümmungsradius $r = 1,3 \mu$ Formfaktor $\alpha = 0$, b) bis e) Krümmungsradius $r = 2,0 \mu$ und Formfaktoren nach DRECHSLER und HENKEL $\alpha = 0$; 0,10; 0,15 und 0,20
 Beste Annäherung der Spitze in Abb. 1 d

Man findet mit dem Verfahren von DRECHSLER und HENKEL, daß die Spitze Abb. 1 am besten durch die durch $r = 2,0 \mu$ und $\alpha = 0,15$ charakterisierte Form angenähert werden kann. Bei der Spitze in Abb. 2 ist es diejenige Form, die durch $r = 2,2 m\mu$ und $\alpha = 0,10$ gekennzeichnet ist. Die folgende Tabelle zeigt die nach (1) berechneten Werte k neben den früher benutzten Werten k' . k' ist mit den in Abb. 1 a bzw. 2 a angegebenen Werte r' und $\alpha = 0$ nach Gl. (1) berechnet worden.

k und k' stimmen insbesondere bei Spitze 12 gut miteinander überein, so daß damit die früher hinsichtlich der Scheitelfeldstärke getroffene Gleichsetzung von Spitze und Hyperboloid gerechtfertigt ist.

Tabelle 1

Spitze	r $m\mu$	α	d cm	k cm^{-1}	r' $m\mu$	k' cm^{-1}
Nr. 12, Abb. 1	2000	0,15	0,25	$1,75 \cdot 10^3$	1300	$1,72 \cdot 10^3$
Nr. 24, Abb. 2	22	0,10	0,20	$1,09 \cdot 10^5$	16	$0,95 \cdot 10^5$

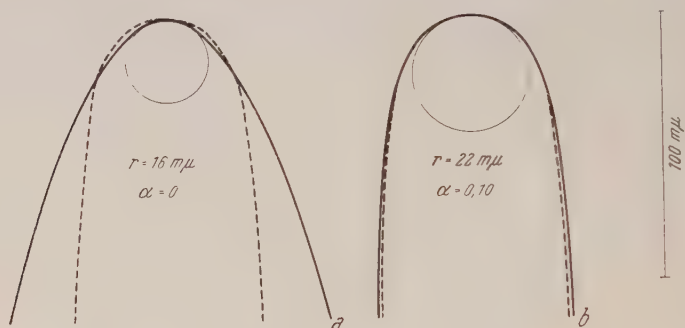


Abb. 2. — — — — Wolframspitze Nr. 24, durch Ionenaufprall erzeugt, nach Abb. 6 Z. f. Phys. **116**, 612, 1940. — — — — Rotationshyperboloide: a) Krümmungsradius $r = 16 m\mu$, Formfaktor $\alpha = 0$. b) $r = 22 m\mu$, $\alpha = 0,10$. Beste Annäherung der Spitze in Abb. 2 b

Die Spitze Nr. 12 wurde einem Schmelzprozeß im Vakuum unterworfen, so daß ihre Oberflächenrauigkeit von nur atomarer Größenordnung sein dürfte. Von einer Berücksichtigung lokaler Feldstärkeerhöhungen können wir daher absehen. Zur Fehlerabschätzung von k ist folgendes zu sagen: Die Unsicherheiten in der Ermittlung des übermikroskopischen Vergrößerungsmaßstabes sowie in der graphischen Bestimmung des Krümmungsradius r von Spitze Nr. 12 betragen je 5%. Die Bestimmung von α ist nach DRECHSLER und HENKEL auf 10% genau möglich, was — für sich allein betrachtet — die Größe k nach (1 a) auf 4% unsicher macht. Der Einfluß des Meßfehlers von d , das nur logarithmisch in die Rechnung eingeht, kann außer Betracht bleiben. Damit ist bei der Spitze Nr. 12 die gesamte Unsicherheit von $k \pm 14\%$. Nehmen wir noch 1% Fehler bei der Messung der Spannung U an, so erhalten wir für die Ungenauigkeit der berechneten Scheitelfeldstärke $\pm 15\%$.

Die extrem feine Spitze Nr. 24 war durch Ionenaufprall erzeugt worden. Die übermikroskopische Aufnahme ist leider gerade im Bereich des Scheitels verschwommen, so daß hier die Ungenauigkeit bei der Bestimmung von k größer ist, als dies bei der zuvor erwähnten Spitze der

Fall war. Zur Ermittlung von r und a wurde mit Rücksicht auf die im nächsten Absatz folgende Feststellung der dunkel gezeichnete Bereich der übermikroskopischen Aufnahme vermessen. Die Unsicherheit von k dürfte etwa 20% betragen.

Nach unserer heutigen Kenntnis dürfte es sich bei dem Saume um die Spitze Nr. 24 (6), Abb. 6) um eine Kohlenstoffanlagerung infolge Zersetzung von Fettmolekülen, die aus den Dichtungen und insbesondere der Objektschleuse des Übermikroskops stammen, infolge Elektronenaufpralls [7] handeln. Diese Erscheinung ist z. B. bei der Nickelspitze in Abb. 4 dazu benutzt worden, die Gestalt der Spitze im frisch geätzten Zustand zu fixieren. Anschließend ist in einem weiteren Versuch durch Erwärmung der Spitze im Vakuum auf Temperaturen oberhalb 1300° C die Oberflächenwanderung der Nickelatome über das eigene Gitter eingeleitet worden [9, 1, 3]. Die Spitze hat sich dabei unter Vergrößerung des Krümmungsradius geglättet und man erkennt in Abb. 4 deutlich die stehengebliebene Kohlenhülle, die die ursprüngliche Form der Spitze umgibt.

2. Bestimmung der Stromdichte am Scheitel der Spitze

Nach der wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission von FOWLER, NORDHEIM, BETHE und SOMMERFELD [2, 5, 11] ist die Stromdichte in A/cm²

$$i = 1,55 \cdot 10^{-6} \frac{F^2}{\varphi} - 2,98 \cdot 10^7 \frac{\varphi^{3/2}}{F} v \left(\frac{3,62 \cdot 10^{-4}}{\varphi} \sqrt{\frac{1}{F}} \right) \quad (2)$$

wobei die Feldstärke F in V/cm und die Austrittsarbeit φ in eV einzusetzen sind. Die Zahlenwerte der Bildkraftkorrektur $v(F, \varphi)$ sind von BETHE und SOMMERFELD tabellarisch angegeben. In der Darstellung $\lg i/F^2$ gegen $1/F$ liefert Gl. (2) in dem Bereich, in dem die Messungen liegen, sehr genau eine Gerade (Abb. 7). Erst bei sehr hohen Feldstärken tritt ein deutliches Abweichen von dieser Geraden auf. Wir ersetzen daher (2) durch die für den praktischen Gebrauch handlichere Form

$$i = A F^2 10^{-\frac{b \varphi^{3/2}}{F}} \quad (3)$$

Die Mengenkonstante A wird durch den Ordinaten-schnittpunkt des nach $1/F = 0$ extrapolierten geradlinigen Teiles der $\lg i/F^2 - 1/F$ Kennlinie bestimmt und die Größe b durch die Neigung dieser Kennlinie. A und b sind von F nicht abhängig, wohl aber von φ . Die Abhängigkeit der Größe b von φ ist sehr gering. Bei $\varphi = 4,5$ eV beträgt $b = 2,89 \cdot 10^7$ V cm⁻¹/(eV)^{3/2} und bei $\varphi = 1,5$ eV ist b nur 1% kleiner als der eben genannte Wert. Über die Abhängigkeit der Größe A von φ siehe die Arbeit [6].

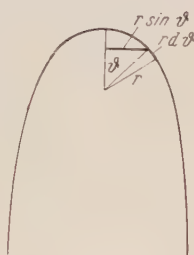


Abb. 3. Zur Berechnung der Stromdichte am Scheitel der Spitze

Der Verlauf der Feldstärke F längs der Oberfläche, der von DRECHSLER und HENKEL für verschiedene Formfaktoren α ermittelt worden ist, läßt sich durch

$$F = F_0 \cdot f(\vartheta, \alpha) \quad (4)$$

ausdrücken (Abb. 3 und 5). ϑ ist dabei der Winkelabstand vom Scheitel. Nach (3) und (4) ist der Verlauf der Stromdichte längs der Oberfläche durch

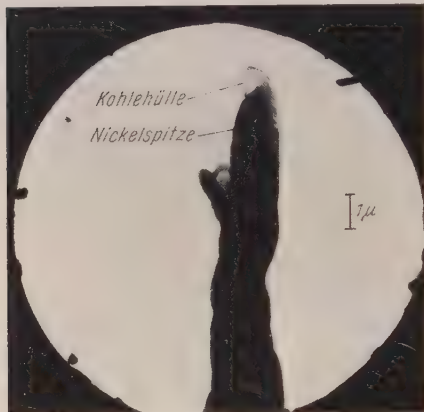


Abb. 4. Übermikroskopische Aufnahme einer durch Ätzen hergestellten Nickelspitze. Die ursprüngliche Gestalt der Spitze ist durch die im Übermikroskop durch Elektronenbestrahlung entstandene Kohlenstoffhülle fixiert. Beim Erwärmen der Spitze im Vakuum auf Temperaturen oberhalb 130° C tritt infolge Oberflächenwanderung eine Glättung der Spitze ein, wobei die Kohlenstoffhülle stehen bleibt. Vergrößerung 4900-fach. Präparation und Aufnahme:

F. GRASENICK

der Beitrag zum Gesamtstrom ohnehin gering ist. Wird nun (6) mit i_0 erweitert, so erhält man, da i_0 von ϑ unabhängig ist,

$$i_0 = \frac{J}{2\pi r^2} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{i}{i_0} \sin \vartheta d\vartheta \right]^{-1} = \frac{J}{2\pi r^2} \cdot g, \quad (7)$$

wobei g unter Berücksichtigung von (5) durch

$$g^{-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{i}{i_0} \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{\pi/2} f^2 10^{-\frac{b q^{3/2}}{F_0} \cdot \frac{1-f}{f}} \sin \vartheta d\vartheta \quad (8)$$

gegeben ist. Die Größe g gibt den Faktor an, um den die Scheitelstromdichte i_0 größer als die mittlere Stromdichte ist. Der Ausdruck g , der eine Funktion nur von $q^{3/2}/F_0$ und α ist, ist durch graphische Integration unter Benutzung der Werte $f(\vartheta, \alpha)$ nach Abb. 5 ermittelt worden und in Abb. 6 für $\alpha = 0,10$ und $0,15$ dargestellt.

$$\frac{i}{i_0} = f^2 10^{-\frac{b q^{3/2}}{F_0} \cdot \frac{1-f}{f}} \quad (5)$$

als Funktion von $q^{3/2}/F_0$, ϑ und α gegeben. i_0 ist die Stromdichte am Scheitel. Der Gesamtstrom J , der im Experiment gemessen wird, ist dann (Abb. 3)

$$J = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} i(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (6)$$

Dabei ist $r = \text{const} =$ dem Krümmungsradius der Spitze und ferner als obere Grenze $\vartheta = \pi/2$ gesetzt worden. Beides ist — wie bereits DRECHSLER und HENKEL feststellen — berechtigt, da wesentliche Abweichungen der Spitze von der Kugelform erst in größerer Entfernung vom Scheitel auftreten und hier

3. Bestimmung von b

Nach (3) ist

$$\lg \frac{i_0}{F_0^2} = \lg A - \frac{b \varphi^{3/2}}{F_0}. \quad (9)$$

Setzt man in diese Gleichung die durch das Experiment bestimmten Größen J und U^* unter Verwendung von (1 a) und (7) ein, so erhält man

$$\lg \frac{J g}{2 \pi r^2 k^2 U^2} = \lg A - \frac{b \varphi^{3/2}}{k U^*} \quad (10)$$

und daraus

$$b = -\frac{k}{\varphi^{3/2}} \left[\frac{\partial \lg J U^2}{\partial 1/U} + \frac{\partial \lg g}{\partial 1/U} \right] = -\frac{k}{\varphi^{3/2}} \frac{\partial \lg J U^2}{\partial 1/U} - \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi^{3/2}/F_0}. \quad (11)$$

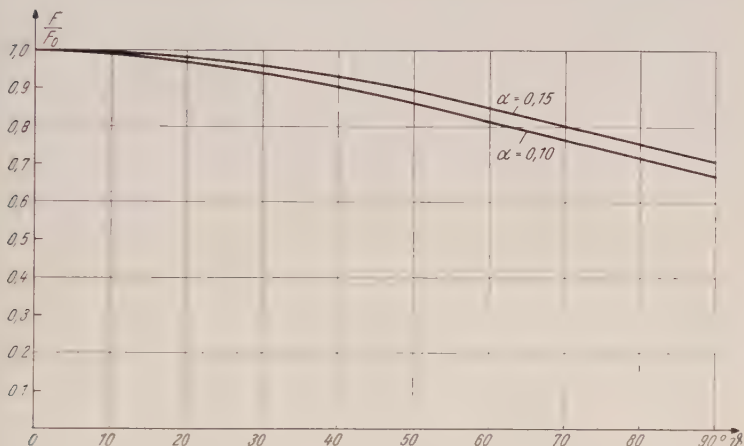


Abb. 5. Feldstärkeabfall F/F_0 als Funktion des Scheitelwinkels für die Formfaktoren $\alpha = 0,10$ und $0,15$ nach DRECHSLER und HENKEL [4]. F_0 = Scheitelfeldstärke

Bei der früheren Auswertung der Experimente war $g' = 1,5 = \text{const.}$ statt g und k' statt k verwendet worden, so daß der früher erhaltene Wert

$$b' = -\frac{k'}{\varphi^{3/2}} \frac{\partial \lg J U^2}{\partial 1/U} \quad (12)$$

lautet. Aus (11) und (12) ergibt sich die Beziehung

$$b = \frac{k}{k'} b' - \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi^{3/2}/F_0}, \quad (13)$$

mit deren Hilfe die früher erhaltenen Werte b' korrigiert werden können. Mit dem Wert $\varphi = 4,50$ eV für die Austrittsarbeit des reinen Wolframs, den Daten k, k' nach Tab. 1 und der Abb. 6 zu entnehmenden Größe $\partial \lg g / \partial \varphi^{3/2}/F_0$ findet man für b die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte.

Tabelle 2

Spitze	Im Bereich F_0 [V · cm ⁻¹]	$\frac{\partial \lg g}{\partial \varphi^{3/2}/F_0}$ [Vcm ⁻¹ /(eV) ^{3/2}]	b' $\left[\frac{\text{Vcm}^{-1}}{(\text{eV})^{3/2}} \right]$	b $\left[\frac{\text{Vcm}^{-1}}{(\text{eV})^{3/2}} \right]$	$\lg A'$	$\lg A$
Nr. 12, Abb. 1	2,7...3,3 · 10 ⁷	1,2 · 10 ⁶	2,7 · 10 ⁷	2,6 ₆ · 10 ⁷	—5,4	—5,5
Nr. 24, Abb. 2	4,6...7,4 · 10 ⁷	2,0 · 10 ⁶	2,8 · 10 ⁷	3,0 ₂ · 10 ⁷	—5,0	—5,2
theoretisch nach (2), (3)				2,89 · 10 ⁷		—5,10

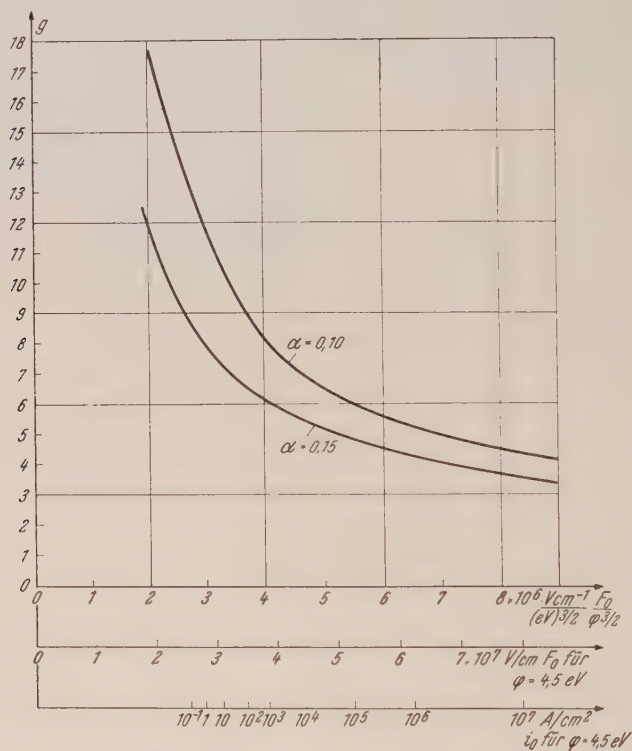


Abb. 6. Faktor g , um den die Stromdichte i_0 am Scheitel größer ist als die mittlere Stromdichte $J/2\pi r^2$ in Abhängigkeit von $F_0/q^{3/2}$, bzw. F_0 bei $\varphi = 4,5$ eV, bzw. i_0 bei $\varphi = 4,5$ eV. (F_0 = Scheitelfeldstärke, φ = Austrittsarbeit.) Formfaktoren $\alpha = 0,10$ und $\alpha = 0,15$

Die Unsicherheit von b ist, da die Größe $\partial \lg g / \partial \varphi^{3/2} / F_0$ mehr als eine Zehnerpotenz kleiner als b ist, im wesentlichen gleich der von k . Man erkennt, daß die experimentell gewonnenen Werte b innerhalb dieser Un-

sicherheit mit dem theoretischen Werte b übereinstimmen. Der Unterschied zwischen b' und b liegt ebenfalls innerhalb der Fehlergrenzen von b .

4. Bestimmung von A

Nach (10) ist der wahre Wert von A durch

$$\lg A = \lg \frac{J g}{2\pi r^2 k^2 U^2} + \frac{b \varphi^{3/2}}{k U} \quad (14)$$

gegeben, während der frühere Wert A' durch die Gleichung

$$\lg A' = \lg \frac{J g'}{2\pi r'^2 k'^2 U^2} + \frac{b' \varphi^{3/2}}{k' U}$$

mit $g' = 1,5$ bestimmt worden war. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich unter Beachtung von (13)

$$\lg A = \lg A' + \lg \frac{r'^2 k'^2 g}{r^2 k^2 g'} - \frac{\varphi^{3/2}}{F_0} \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi^{3/2}/F_0}. \quad (15)$$

Setzt man in diese Gleichung die Daten r, r', k, k' aus Tab. 1, $g' = 1,5$ und ferner g und $\partial \lg g / \partial \varphi^{3/2}/F_0$ für verschiedene Meßwerte F_0 des Feldstärkebereiches, in dem die Messungen liegen, ein, so sieht man, daß das zweite und dritte Glied rechts in (15) sich weitgehend kompensieren und eine von F_0 praktisch unabhängige Korrekturgröße liefern. Das Ergebnis wird durch die Gegenüberstellung von $\lg A'$ und $\lg A$ in Tab. 2 gezeigt. $\lg A$ stimmt bis auf den Betrag von 0,4 bzw. 0,1 mit dem theoretisch zu erwartenden Wert überein. Eine Unsicherheit dieses Ausmaßes kann auf Grund von Gl. (14) verständlich gemacht werden: Wir betrachten zunächst das erste Glied auf der rechten Seite von (14). $r k$ ist nach dem früher Gesagten mit Rücksicht auf die Bestimmung von α auf 4% und U auf 1% unsicher; also ist $r^2 k^2 U^2$ auf 10% ungenau. g ist wegen der oben genannten Unsicherheit von F_0 auf 15% unsicher. Weiterhin bringt die graphische Integration, die zur Berechnung von g nötig war, einen Fehler von g , der zu 10% geschätzt werden kann. Schließlich ist noch zu beachten, daß bei der Berechnung von g nicht der Tatsache Rechnung getragen wurde, daß einzelne Bereiche der einkristallinen Spitzenkalotte eine verminderte Emission zeigen. Der dadurch bedingte Fehler kann mit 10% veranschlagt werden. Alle die soeben genannten Fehler machen das erste Glied rechts in Gl. (14) auf rund 0,2 unsicher. Das zweite Glied rechts in Gl. (14) ist von der Ordnung 10; es kann — wie die Betrachtung von Gl. (11) lehrt — um etwa 2% unsicher sein. Dies bedeutet einen möglichen Fehler vom Betrage 0,2, so daß der gesamte Fehler von $\lg A$ etwa 0,4 ausmachen kann.

Die korrigierten Werte b und $\lg A$ in Tab. 2 zeigen, daß das früher in [6] erzielte Ergebnis der Gültigkeit der unter Berücksichtigung der Bildkraft gewonnenen wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission bei reinen Metalloberflächen aufrechterhalten bleibt.

II. Die Feldelektronenemission in ihrer Abhängigkeit von der Austrittsarbeit

1. Bestimmung von F_0

Bei der Untersuchung der Feldelektronenemission von mit Fremdatomen bedeckten Kathoden wurde früher so vorgegangen, daß die zur

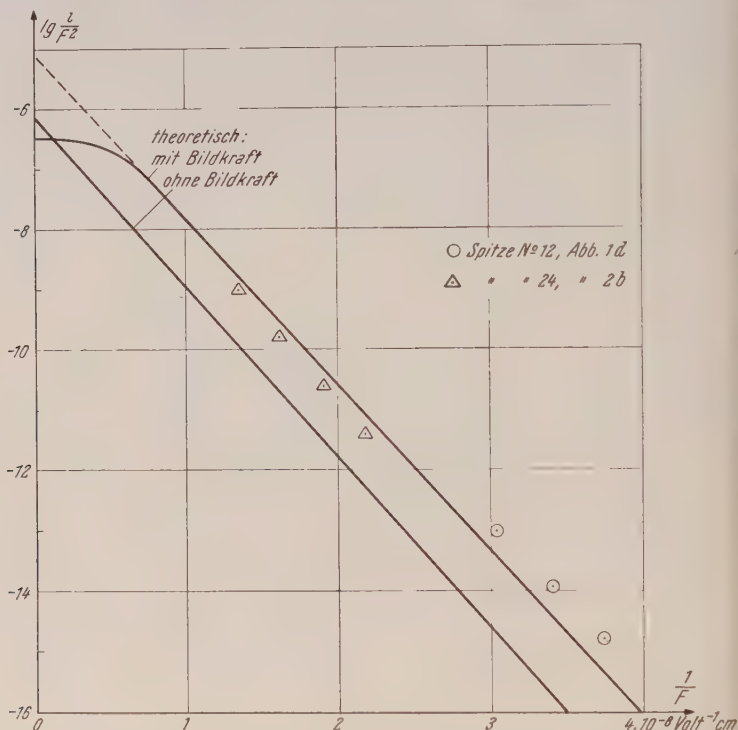


Abb. 7. Stromdichte—Feldstärke—Kennlinien des reinen Wolfram nach der wellenmechanischen Theorie von FOWLER-NORDHEIM (ohne Bildkraft) und BETHE-SOMMERFELD (mit Bildkraft) und die unter Berücksichtigung des Verlaufes von Feldstärke und Stromdichte längs der Spitzenoberfläche korrigierten Meßergebnisse

Berechnung der Scheitelfeldstärke erforderliche Größe k' aus der Neigung der Strom-Spannungskennlinie der reinen Wolframkathode

$$\frac{\partial \lg J/U^2}{\partial 1/U} = - \frac{b_w \varphi_w^{3/2}}{k'}$$

ermittelt wurde. Für b_w ist dabei der für Wolfram mit der Austrittsarbeit $\varphi_w = 4,5 \text{ eV}$ gültige theoretische Wert (Tab. 2) eingesetzt worden. In Wirklichkeit ist aber nach (11) zu setzen

$$\frac{\partial \lg J/U^2}{\partial 1/U} + \frac{\partial \lg g}{\partial 1/U} = - \frac{b_w \varphi_w^{3/2}}{k}$$

Durch Kombination dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{k}{k'} = 1 + \frac{1}{b} \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi^{3/2} / F_0} \quad (16)$$

In dieser Gleichung ist der Ausdruck auf der rechten Seite zunächst nur auf die Daten der reinen Wolframkathode anzuwenden. Es läßt sich jedoch durch Zahlenrechnungen, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten wollen, zeigen, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (16) bei gegebener Gestalt (r, a) der Spitze im reinen und im bedeckten Zustand praktisch den gleichen Wert hat. Dieses Ergebnis rührt im wesentlichen daher, daß die Elektronenstromdichte nach (2) im Bereich unserer Meßergebnisse praktisch nur von dem Verhältnis $\varphi^{3/2}/F_0$ abhängt. Gl. (16) kann also bei beliebigen Bedeckungsgraden der Kathode angewendet werden, weshalb auch der auf Wolfram bezügliche Index w hier fortgelassen ist. Voraussetzung für diese Allgemeingültigkeit von (16) ist allerdings, daß die mit Fremdatomen belegte Kathode eine einheitliche Austrittsarbeit besitzt, so daß die gesamte emittierende Fläche im reinen und im bedeckten Zustand die gleiche ist.

Die zahlenmäßige Auswertung von (16) zeigt, daß z. B. bei Spitzen der Formen Abb. 1 d und 2 b $k/k' = 1,04$, bzw. $1,07$ ist. Das bedeutet, daß die wahre Feldstärke um 4^0_0 bzw. 7^0_0 größer ist als früher angenommen wurde. Wie wir jedoch weiter sehen werden, hat diese Korrektur kaum einen Einfluß auf die weiteren, an den bedeckten Kathoden erhaltenen Ergebnisse.

2. Bestimmung der Austrittsarbeit

Das $\varphi^{3/2}$ -Gesetz der Feldelektronenemission wurde früher dadurch geprüft, daß aus der Neigung der Kennlinien der optimal bzw. kompakt bedeckten Kathoden

$$\frac{\partial \lg J/U^2}{\partial 1/U} = - \frac{b \varphi'^{3/2}}{k'}$$

die Austrittsarbeit φ' ermittelt und der erhaltene Wert mit aus der Literatur bekannten Werten verglichen wurde. In Wirklichkeit ist aber nach (11) anzusetzen

$$\frac{\partial \lg J/U^2}{\partial 1/U} + \frac{\varphi^{3/2}}{k} \frac{\partial \lg g}{\partial \varphi^{3/2}/F_0} = - \frac{b \varphi^{3/2}}{k}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man unter Verwendung von (16) nach kurzer Rechnung

$$\varphi = \varphi'. \quad (17)$$

Dies bedeutet, daß die früher aus den Feldemissionsmessungen ermittelten Werte der Austrittsarbeiten, die das $\varphi^{3/2}$ -Gesetz als gültig erliefen, durch die Berücksichtigung der Stromdichteverteilung nicht modifiziert werden, sofern die zu (16) notwendige Voraussetzung erfüllt ist. Diese Voraussetzung der einheitlichen Austrittsarbeit war bei den kompakt mit Kalium und Caesium bedeckten Kathoden gut erfüllt.

(Auch die Bereiche verminderter Emission stimmen in diesem Fall bei kompakt bedeckter und reiner Kathode in ihren Abmessungen gut überein.) Weniger gut ist die genannte Voraussetzung hingegen bei der kompakten Ba und den mit K, Cs, Ba optimal bedeckten Kathoden erfüllt¹.

3. Bestimmung von $\lg A - \lg A_w$

Sind F und F_w die Scheitelfeldstärken, die erforderlich sind, um einen gegebenen Strom J aus der bedeckten bzw. der unbedeckten Kathode zu entnehmen, so ist nach (14)

$$\lg A - \lg A_w = \lg \frac{g F_w^2}{g_w F^2} + \left(\frac{b \varphi^{3/2}}{F} - \frac{b_w \varphi_w^{3/2}}{F_w} \right).$$

Ohne Berücksichtigung der Stromdichteverteilung wurde früher

$$\lg A' - \lg A_w' = \lg \frac{F_w'^2}{F'^2} + \left(\frac{b \varphi'^{3/2}}{F'} - \frac{b_w \varphi_w'^{3/2}}{F_w'} \right)$$

angenommen. Setzt man nach (17) $\varphi = \varphi'$ und ferner $k/k' = F/F' - F_w/F_w'$, so erhält man

$$(\lg A - \lg A_w) - (\lg A' - \lg A_w') = \lg \frac{g}{g_w} + \left(1 - \frac{k}{k'} \right) \left(\frac{b \varphi^{3/2}}{F} - \frac{b_w \varphi_w^{3/2}}{F_w} \right). \quad (18)$$

Eine Abschätzung der rechten Seite von (18) unter den Annahmen $\varphi_w = 4,5$ eV, $\varphi = 1,5$ eV, $\alpha = 0,1$, bzw. $0,15$ liefert im Bereich $i_0 = 1$ bis 10^6 A/cm² einen Wert kleiner als $0,02$. Eine derart kleine Korrektur kann unberücksichtigt bleiben, da sie eine Größenordnung kleiner als die Unsicherheit in der Bestimmung von $\lg A - \lg A_w$ ist. Da von Gl. (17) Gebrauch gemacht wurde, gilt auch hier — ebenso wie bei der Ermittlung von φ —, daß eine einwandfreie Bestimmung von $\lg A - \lg A_w$ nur möglich ist, wenn die Kathode eine einheitliche Austrittsarbeit besitzt. Damit ist gezeigt, daß die früher in [6] an den kompakten Kalium- und Caesiumschichten ($\varphi = 2,18$, bzw. $1,92$ eV) erzielten experimentellen Ergebnisse, die die Gültigkeit der unter Berücksichtigung der Bildkraft gewonnenen wellenmechanischen Feldemissionstheorie auch für bedeckte Kathoden bestätigten, nach den in dieser Arbeit angestellten Überlegungen keiner Revision bedürfen.

Gerätebau-Anstalt Balzers, Fürstentum Liechtenstein.

Literatur

1. M. BENJAMIN und R. O. JENKINS, Proc. Roy. Soc. (A) **176**, 262, 1940.
2. H. BETHE und A. SOMMERFELD, Handb. d. Phys. XXIV/2, S. 441, 1933.

¹ Die Durchführung einer Korrektur der bei diesen Schichten erzielten Ergebnisse ist leider heute nicht mehr möglich, da die hierfür erforderlichen Unterlagen durch Kriegseinwirkung zum Teil abhanden gekommen sind.

3. H. BIRKENSCHENKEL, R. HAEFER und P. MEZGER, *Acta Physica Austriaca* **7**, 402, 1953.
4. M. DRECHSLER und E. HENKEL, *Z. f. angew. Phys.* **6**, 341, 1954.
5. R. H. FOWLER und L. NORDHEIM, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **119**, 173, 1928.
6. R. HAEFER, *Z. f. Phys.* **116**, 604, 1940.
7. H. KÖNIG, *Naturwiss.* **35**, 261, 1948.
8. E. W. MÜLLER, *Z. f. Phys.* **106**, 541, 1937.
9. E. W. MÜLLER, *Z. f. Phys.* **108**, 668, 1938.
10. E. W. MÜLLER, *Ergeb. d. exakt. Naturw.* **27**, 290, 1953.
11. L. Nordheim, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **121**, 626, 1928 und *Phys. Zeitschr.* **30**, 177, 1929.
12. F. OLLENDORFF, *Potentialfelder der Elektrotechnik*, S. 320, 1932.

Buchbesprechungen

Atomphysik. Von K. BECHERT und CH. GERTHSEN. Dritte, umgearbeitete Auflage. Band I: Allgemeine Grundlagen. 1. Teil. (Sammlung Götschen: Band 1009.) Mit 55 Textabb., 124 S. DM 2.40. — Band II: Allgemeine Grundlagen. 2. Teil. (Sammlung Götschen: Band 1033.) Mit 48 Textabb., 112 S. DM 2.40. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955.

Die vorliegende 3. Auflage der Allgemeinen Grundlagen der Atomphysik in der Sammlung Götschen ist außerordentlich zu begrüßen. Stellt sie doch ein wertvolles Hilfsmittel für das Studium dieses wichtigen Zweiges der Physik dar. Nicht nur die Auswahl des Stoffes, sondern auch die ganze Anlage ist als mustergültig zu bezeichnen. Der Leser findet aber auch die wichtigsten Fundamentalkonstanten übersichtlich zusammengestellt, wobei die neueste Literatur zugrunde gelegt wurde. Eine erste Orientierung bei Beginn des Studiums gestattet hier mühelos sich einen Überblick zu verschaffen.

Druck und Ausstattung des Werkes stellen dem Verlag ein hervorragendes Zeugnis aus.
P. URBAN, Graz.

Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Band I. Von K. M. CASE, F. DE HOFFMANN und G. PLACZEK. Mit 44 Textabb., 174 S. Washington: United States Atomic Energy Commission. 1953. \$ 1.25.

Von diesem Werk liegt erst der erste Band vor und dieser bricht mitten in einem Kapitel ab, so daß eine endgültige Kritik vorbehalten bleiben muß.

Es beinhaltet eine ins Detail gehende Abhandlung der allgemeinen Gleichungen der Neutronendiffusionstheorie hinsichtlich der geometrischen Form und der physikalischen Eigenschaften des Mediums. Dabei beschränkt man sich auf die Annahme einer einheitlichen Neutronengeschwindigkeit, die sich auch im Verlauf des Diffusionsprozesses nicht ändern soll. Für kompliziertere Probleme wurden nur ganz kurz die Möglichkeiten einer Behandlung angezeigt.

Es ist daher bereits ersichtlich, daß dieses Werk nur für einen ganz kleinen Kreis von Wissenschaftlern von Interesse ist, für diese aber von immens großem.

H. ZINGL, Graz.

Einführung in die theoretische Physik. Von W. DÖRING. Band II: Das elektromagnetische Feld. (Sammlung Götschen: Band 77.) Mit 15 Textabb., 123 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 2.40.

Der eben erschienene 2. Band der Einführung in die Theoretische Physik behandelt das elektromagnetische Feld. Nach einer eingehenden Behandlung der Elektrostatik und des elektrischen Stromes wird die Magnetostatik dargestellt. Dann folgt das Magnetfeld von stationären Strömen und das elektrische Feld in einem veränderlichen Magnetfeld. Als Abschluß werden die allgemeinen elektromagnetischen Gleichungen ausführlich erörtert. Der ganze Stoff wird modern dargestellt und den heutigen Erfordernissen entsprechend ausgewählt. So findet der Leser beispielsweise eine kurze und übersichtliche Behandlung der Elektronenschleuder und im Anhang einen sehr lesenswerten Artikel über die Maß- und Begriffssysteme.

Druck und Abbildungen sind außerordentlich übersichtlich. Das Werk kann unseren Studierenden als Hilfsmittel und Repetitorium wärmstens empfohlen werden.

P. URBAN, Graz.

Theoretical Elasticity. Von A. E. GREEN und W. ZERNA. Mit 42 Textabb., XIII, 442 S. London: G. Cumberlege. 1954. 50 s. net.

Die Verfasser behandeln in dem vorliegenden Werke hauptsächlich drei Gebiete der Elastizitätstheorie: Endliche elastische Deformationen, Methode der komplexen Variablen für zweidimensionale Probleme isotroper und anisotroper Körper und Schalentheorie. Die Darstellung verwendet konsequent die allgemeine Tensor-schreibweise und stellt die behandelten Probleme in eleganter und durchsichtiger Form dar. Nach einer Zusammenfassung der wichtigsten Hilfsmittel im ersten Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften der zweidimensionalen Oberflächen abgeleitet, indem man sie als in den dreidimensionalen EUKLIDISCHEN Raum eingebettet betrachtet. Das Kapitel II enthält einen Abriss der allgemeinen Theorie der Elastizität unter Berücksichtigung endlicher Deformationen, wobei besondere Aufmerksamkeit auf die Formulierung der Spannungsbeziehungen isotroper Körper verwendet wurde. Im dritten Abschnitt werden die Lösungen einiger spezieller Probleme isotroper und inkompressibler Körper behandelt, wobei eine Anzahl von ihnen zur praktischen Anwendung auf gummi-ähnliche Materialien besonders geeignet erscheinen. Das IV. Kapitel gibt eine Theorie der kleinen Deformationen, die zu endlichen überlagert werden, wobei keinerlei besondere Annahmen über die Spannungs-Energie-Relation gemacht werden. Diese Theorie ist sowohl auf kompressible als auch auf inkompressible Körper anwendbar und gestattet die Lösung einiger spezieller Probleme. Nach einer Übersicht über die klassische Theorie der Elastizität infinitesimaler Deformationen im Kapitel V sind die letzten Abschnitte den verschiedenen Theorien der Platten, Schalen etc. gewidmet.

Die Darstellung kann als sehr klar und übersichtlich angesehen werden und stellt das Werk ein wertvolles Hilfsmittel für die Studierenden der höheren Semester dar, welche sich in einzelne Abschnitte der Elastizitätstheorie vertiefen wollen.

P. URBAN, Graz.

Nuclear Species. Von H. E. HUNTLEY. Mit Textabb., XIX, 193 S. London: MacMillan & Co. Ltd. — New York: St. Martin's Press. 1954. 21 s. net.

Das eben erschienene Buch soll dem Studierenden einen Überblick über einige Gebiete der Kernphysik geben. Nach einem einführenden Abschnitt über den Atomkern und seine Struktur wird zuerst die Größe des Kernes behandelt, dann folgt eine Übersicht über die verschiedenen Isotopen und ihre Bestimmung. Dabei wird besondere Rücksicht auf die Stabilität genommen sowie auf Massendefekt und Bindungsenergie. Eine kurze Übersicht über die Energieniveaus der Kerne mit sehr übersichtlichen Diagrammen vervollständigt die Behandlung des Stoffes. Am Schluß wird noch auf den Ursprung der Elemente eingegangen, wobei auch auf die neuesten Erkenntnisse Bezug genommen wird.

Das Werk kann den Studierenden naturwissenschaftlicher Richtung bestens empfohlen werden.

L. HANKE, Graz.

Atomic Energy and its Applications. Von J. M. A. LENIHAN. (Applied Physics Series, herausgegeben von E. G. RICHARDSON.) Mit 73 Textabb., XIII, 265 S. London: Sir I. Pitman & Sons, Ltd. 1954. Geb. 22 s. 6 d.

Der Titel selbst ist nicht neu und schreckt unter Umständen ab, da er in der letzten Zeit oft genug mißbraucht wurde. Hier aber versucht ein Praktiker, einen

umfangreichen Stoff, der nach wie vor einer sprunghaften Entwicklung unterworfen ist, in prägnanter und äußerst übersichtlicher Form darzustellen, was dem Autor zweifelsohne gelungen ist.

In den ersten Kapiteln werden die Grundbegriffe erläutert, die zum Verständnis der übrigen Kapitel notwendig sind. Jene Leser, die der experimentellen Atomphysik nicht fremd gegenüber stehen, können diese Kapitel ruhig überschlagen, sie verzichten dabei höchstens auf die Beschreibung neuester Verbesserungen der hier erwähnten Instrumente, wie Röntgenröhre, Geigerzähler etc.

In den nun folgenden Kapiteln werden die verschiedenen Arten der Beschleunigungsmaschinen, Kernreaktionen und Reaktortypen erläutert. Die ersteren vorwiegend an englischen Beispielen und die letzteren an amerikanischen Typen (und zwar der im Kriege entstandenen Reaktoren X 10, CP-2, CP-3, LOPO und HYPO).

Der Erzeugung von Isotopen (hier findet man sogar eine Preisliste der in Harwell erzeugten Spaltprodukte) und dem Strahlenschutz ist ein breiter Raum gewidmet und zeigt die Unzahl der Sicherheitsvorkehrungen in England bei der Beschäftigung mit strahlendem Material. Die Verwendung der diversen Produkte in der Medizin wird in einer Unzahl von Beispielen an Hand von ^{24}Na , ^{32}P , ^{131}J , ^{60}Co und ^{192}Ir als Spurensucher und für therapeutische Zwecke charakterisiert, so daß dieses Werk auch für Mediziner sehr wertvoll sein dürfte, der Physiker kommt bei dem nun folgenden Kapitel der Anwendungen in der Industrie und Wissenschaft wohl etwas zu kurz, so fehlt z. B. die genauere Behandlung jener Geräte, die die Forschungen mit Neutronenstrahlen ermöglichen.

Im abschließenden Kapitel wird das Problem der Energiegewinnung hinsichtlich verschiedener Reaktortypen erwähnt.

Das Werk ist kein Lehrbuch, eher ein Nachschlagswerk, enthält das Wesentlichste in einer klaren Sprache und Übersichtlichkeit, so daß es dem Forscher und Praktiker in den nächsten Jahren ein beliebtes Hilfsmittel sein wird, umso mehr, da jedes Kapitel mit einem sorgfältig ausgewählten Literaturverzeichnis versehen ist.

H. ZINGL, Graz.

Die physikalische Erkenntnis und ihre Grenzen. Von A. MARCH. („Die Wissenschaft.“ Herausgeber W. WESTPHAL: Band 108.) VI, 114 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1955. Geb. DM 9.80.

Dieser Band der Reihe „Die Wissenschaft“ behandelt in anregender und flüssiger Form physikalische Grundlagenprobleme. Zunächst wird die Anschaulichkeit und die Objektivität der Naturgesetze einer Kritik unterzogen. Die Begriffe der Kausalität und der Wahrscheinlichkeit werden diskutiert. Die Frage nach einer Substanz der elementaren Teilchen im philosophischen Sinn wird erörtert. Weiters wird die formale Seite der Quantentheorie, einschließlich HILBERT-Raum und zweiter Quantisierung, dem Nichtmathematiker nähergebracht. Ein Schlußkapitel legt die Theorie der kleinsten Länge dar, die der Verfasser seit 1937 entwickelt hat.

Verschiedene der in dem Buch vertretenen Meinungen dürften nicht ohne weiteres zu akzeptieren sein; wenn der Verfasser etwa bei Elementarteilchen der FERMI-Statistik Nichtwiedererkennbarkeit, der BOSE-Statistik aber Wiedererkennbarkeit eines individuellen Teilchens zuordnet; wenn er den Atomkernen sogar generell Wiedererkennbarkeit zuspricht; wenn er den substantiellen Charakter der Himmelskörper als unbeweisbare Hypothese, den der Atomkerne dagegen als offenbar bezeichnet; wenn er feststellt, die Quantenmechanik gehe der Frage aus dem Wege, wie die substanzlosen elementaren Teilchen substantielle

Atomkerne erzeugen, indem sie die Materie nicht in derselben Art wie die elementaren Teilchen behandle.

Auch andere Teile des Buches scheinen dem Ref. gegen eine Kritik nicht völlig gefeit.

K. BAUMANN, Wien.

Elektronik des Einzelelektrons. Von F. OLLENDORFF. (Technische Elektrodynamik: Band II Teil 1.) Mit 313 Textabb., XII, 643 S. Wien: Springer-Verlag. 1955. Geb. S 582.—, DM 97.—, \$ 23.10, sfr. 99.30.

Während sich die „äußere“ Elektronik mit der ganzen Ionenzone als Schaltelement eines elektrischen Netzwerkes befaßt, untersucht die „innere“ Elektronik die Erzeugung von Elektronen, bzw. Ionen und ihre Bewegung im Hochvakuum innerhalb der Zelle unter dem Zwange elektrodynamischer Kräfte. Kann man dabei von der Wechselwirkung der Teilchen untereinander absehen, so gelangt man zu der gewöhnlich als *Elektronenoptik* bezeichneten „inneren Elektronik des Einzelelektrons“, die Gegenstand des vorliegenden Buches ist. Der zweite, vom Verlag angekündigte Teil wird sich mit der Elektronik der *Kollektive* befassen.

Angesichts der Gleichartigkeit des behandelten Gebietes kann man nicht umhin, die „Grundlagen der Elektronenoptik“ von W. GLASER zum Vergleich heranzuziehen. Es zeigt sich, daß beide Werke einander in gewissem Sinne ergänzen: während GLASER mehr die *Optik* der Partikelströmungen in den Vordergrund stellt und vor allem die rotationssymmetrischen Felder im Hinblick auf das Elektronenmikroskop behandelt, liegt bei OLLENDORFF das Gewicht mehr auf der Elektronik verschiedener technischer Elektronengeräte.

Die Darstellung schreitet von den elementaren Tatsachen der Elektronenbewegung im elektrischen und magnetischen Feld über die allgemeine klassische Mechanik des Einzelelektrons fort zur GAUSSschen und SEIDEL-GLASERSchen Dioptrik und schließt mit den Grundlagen der relativistischen Elektronik ab. Die theoretischen Entwicklungen werden durchwegs unmittelbar durch Anwendungsbeispiele illustriert. Auf diese Weise wird der Leser in didaktisch sorgsam aufgebautem Fortschreiten bekannt gemacht mit der Wirkungsweise und Theorie wichtiger elektronischer Geräte wie Oszillographenröhre, Massenspektrograph, Magnetron, Zyklotron, Elektronenlinse und schließlich, im relativistischen Teil, mit den Elektronenbeschleunigern.

Das reichhaltige und gut ausgestattete Buch stellt eine echte Bereicherung der elektronenoptischen Literatur dar.

H. GRÜMM, Wien.

The Physics of Particle Size Analysis. A Conference arranged by the Institute of Physics and held in the University of Nottingham from the 6 to 9 April, 1954. (British Journal of Applied Physics: Supplement No. 3.) Mit Textabb., VI, 218 S. London: The Institute of Physics. 1954. 35 s.

Dieser offizielle Bericht über das unter diesem Titel im April 1954 abgehaltene Symposium enthält alle Referate in ungekurzter, teilweise auch nachträglich vom Autor ausgefilterter Form, ja darüber hinausgehend auch die anschließenden Diskussionen.

Es ist natürlich hier unmöglich, eine wenn auch noch so kurze Besprechung der einzelnen Beiträge zu liefern. Diese wurden in acht Sitzungen gebracht und sind auch in derselben Form und Reihenfolge in den Bericht aufgenommen. Vielleicht ist es das beste, kurz die Themen und wesentlichsten Züge der einzelnen Sitzungen zu erwähnen:

A. Fragen der Relativbewegung von Teilchen und Flüssigkeiten werden vom hydrodynamischen Standpunkt aus erläutert, wobei man, von den Grenzfällen eines einzelnen Teilchens und unendlich ausgedehnter Flüssigkeit ausgehend, zu

realeren Gegebenheiten und Fragen der Viskosität von Suspensionen, der Sedimentationsgeschwindigkeit sowie der Geschwindigkeitsverteilung kugelförmiger Teilchen in Gasen gelangt. Ein recht interessanter Artikel bringt einen Vergleich der verschiedenen Methoden der Teilchengrößenbestimmung durch Sedimentationsuntersuchungen. B. Molekularphänomene der Relativbewegung von Teilchen zu Flüssigkeit. Es wird der Einfluß der KNUDSENSchen Strömung als Beitrag zur Gasdurchlässigkeit feinkapillarer Systeme untersucht und gezeigt, daß diese zur Erklärung der Gasdurchlässigkeiten bei niedersten Drucken herangezogen werden muß. In einem weiteren Referat wird auch die Rolle der adsorbierten Moleküle in diesem Zusammenhange aufgezeigt. Darnach folgen auf industrielle Anwendungen zugeschnittene Betrachtungen über die Gasdurchlässigkeit kolloider Kohlenstoff-Filter. Ein weiterer Beitrag behandelt die Schwierigkeiten bei Sedimentationsanalysen, die durch das Auftreten des elektroviskosen Effektes bedingt sind. C. Diese Gruppe enthält Arbeiten über Streuung und Absorption von Licht an kleinen Teilchen und die Auswertung der Ergebnisse dieser Effekte in Hinblick auf die Bestimmung der Teilchengröße. Hier wird der Berechnung die Annahmen kugelförmiger Teilchen zugrunde gelegt, während in der nächsten Sitzung D gerade die Frage der Abweichung von der Kugelgestalt behandelt werden, was üblicherweise durch Einführung sogenannter Formfaktoren geschieht. Gerade diese Probleme sind in den letzten Jahren intensiv bearbeitet worden. Ein Vortrag befaßt sich mit der Korrelation zwischen STOKESSchem und projiziertem Durchmesser eines Glaspulvers, ein weiterer mit der Abhängigkeit der Sinkgeschwindigkeit von der Größe und Gestalt der Teilchen. Sitzung E behandelt die visuelle Zählung und Größenbestimmung mikroskopischer Teilchen, wobei auch Methoden zur Abschätzung der Größe stark irregulär geformter Teilchen sowie die Auszählung elektronenmikroskopischer Aufnahmen zur Sprache kamen. Dagegen sind im nächsten Abschnitt F die theoretischen Grundlagen, im Abschnitt G sehr ausführlich die Apparate und Verwendungsmöglichkeiten der modernen photoelektronischen Zählmethoden abgehandelt. Diese Berichte zeigen den großen Fortschritt, der durch Verwendung automatischer Zählverfahren sowohl in der reinen Forschung als auch in der Industrie ausgelöst wurde. Im letzten Abschnitt H werden Beiträge gebracht, die sich nicht ohne weiters einem der obigen Titel unterordnen ließen, insbesondere Fragen der Dickenmessung, Pulververteilung, Adhäsion und Aggregation von Staubeilchen.

Der Tagungsbericht schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse, und es kann wohl gesagt werden, daß er für jeden Physiker oder Chemiker, der in irgendeiner Weise an Eigenschaften disperser Systeme interessiert ist, eine wertvolle Informationsquelle darstellt.

H. STIPPEL, Graz.

Physikertagung Innsbruck. Hauptvorträge von der gemeinsamen Jahrestagung 1954 des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften und der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft. Herausgegeben von H. AUER, E. BRÜCHE und R. STEINMAURER. Mit 97 Abb. und 1 Tabelle, 138 S. Mosbach/Baden: Physikalischer Verlag. 1954. Geb. DM 19.20.

Die Zusammenfassung der Hauptvorträge der Physikertagung Innsbruck vermittelt dem Physiker ein geschlossenes Bild dieser Tagung und gestattet einen Überblick über die behandelten Probleme. Der Verlag hat hiemit eine dankenswerte Aufgabe erfüllt, die auch für die Zukunft sehr zu begrüßen wäre. Die außerordentliche Vielfalt der behandelten Themen gestattet leider nicht eine Behandlung im einzelnen. Alles in allem kann aber gesagt werden, daß mustergültige Arbeit geleistet wurde. Druck und Ausführung des Werkes sind übersichtlich und stellen dem Verlag das beste Zeugnis aus.

P. URBAN, Graz.

Static Electrification. A symposium held by The Institute of Physics in London on 25, 26 and 27 March, 1953. (British Journal of Applied Physics: Supplement Nr. 2.) Mit Textabb., IV, 104 S. London: The Institute of Physics. 1953. Geb. 25 s.

Elektrostatische Probleme zählen mit zu den ältesten der Elektrizitätslehre überhaupt. Dennoch harren viele von ihnen auch heute noch der Lösung, und es war ein begrüßenswerter Gedanke des Institutes of Physics, die gelegentlich einer Tagung über elektrostatische Fragen im Bedford College London im März 1953 gehaltenen Vorträge zusammengefaßt zu publizieren.

Mit Recht wird gleich in der ersten Arbeit „Theory of contact electrification“ von Prof. VICK die Forderung gestellt, für die Erklärung der elektrostatischen Spannungserzeugung — für die bis vor kurzem nur die HELMHOLTZschen Vorstellungen über die Entstehung elektrischer Doppelschichten zur Verfügung standen — die neuesten, auf Grund ganz anderer Untersuchungen gewonnenen Anschauungen über das Zustandekommen der Kontaktspannungen auf Grund des Bändermodelles heranzuziehen. Wenn sich damit auch manche Erscheinungen noch nicht befriedigend erklären lassen — Störungen durch absorbierte Fremdtome an den Oberflächen spielen dabei in unerwünschter Weise mit — so lassen sich die Verhältnisse doch wesentlich besser übersehen. In Dr. HENRY's Arbeit „Survey of Generation and dissipation of static electricity“ sind insbesondere Angaben über die Ladungsmessung und die erreichbaren Ladungswerte (150 kV/cm^2 erlebener Fläche) und eine auf klassischer Basis abgeleitete Theorie bemerkenswert, die jedoch die Erscheinungen wie der Verfasser selbst angibt, nur bei Ionen — nicht bei Elektronenübergängen zu deuten gestattet. In Arbeiten von COOPER und HARPER „The electrification of fluids in motion“ und „Liquids giving no electrification by bubbling“ werden die auch praktisch bedeutsamen Probleme der Aufladung bewegter Flüssigkeiten behandelt, wobei sich HARPER offenbar gerechtfertigt gegen die Ansicht der Entstehung elektrostatischer Aufladung auf Grund elektrostatischer Influenz stellt. Die Frage der Aufladung von Walzen wie sie in Fäbtilerzeugungsmaschinen Verwendung finden, wird von MEDLEY in der Arbeit „The dissipation of electrical charges generated by rollers“ behandelt. Unter den zahlreichen anderen Arbeiten erscheint der Aufsatz von HENRY „The role of symmetric rubbing in the generation of static electricity“ bemerkenswert, in dem auf die Entstehung elektrostatischer Ladungen beim unsymmetrischen Reiben gleicher Stoffe eingegangen wird. Eine vom Verfasser gebrachte Theorie, die vom Temperaturgradienten an der Berührungsstelle ihren Ausgang nimmt, wird wohl noch zu überprüfen sein.

Von großer praktischer Bedeutung sind Ausführungen von LOWE und LUCAS „The physics of electrostatic precipitation“ die darauf abzielen, die Wirkung elektrostatischer Entstaubungsanlagen, wie sie in der Nähe von kohlenstaubetriebenen kalorischen Kraftwerken Verwendung finden, auf Grund der molekularen und elektrischen Kräfte, die auf die Staubeilchen wirken, quantitativ zu erklären. Von noch größerer Bedeutung sind elektrostatische Verfahren zum Aufbringen von Überzügen (Farben, Rostschutzmittel usw.) die in einer Abhandlung von TILNEY „Electrostatic coating processes“ beschrieben werden. Der letzte Stand in der Entwicklung elektrostatischer Generatoren, wie sie in der kernphysikalischen Forschung, Medizin und Lebensmittelindustrie Verwendung finden, ist Gegenstand des Aufsatzes „Survey of electrostatic generators“ von SHIRE. In Teilchenbeschleuniger mit 5.5 MeV für positive Ionen mit $100 \mu\text{A}$ der High Voltage Engineering Co., der eingehend beschrieben wird, sei hier in diesem Zusammenhang erwähnt. Bemerkenswert sind weiter Ausführungen Prof. FELICI's „Ten years on electrostatics at the University of Grenoble“, in denen auf elektrostatische Generatoren verhältnismäßig großer Leistung eingegangen wird. Den Schluß des Heftes nehmen Arbeiten über die schädliche Auswirkung elektro-

statischer Aufladungen, wie sie in der modernen Industrie im Bergbau, in der Kinotechnik, aber auch im Operationssaal häufig in Erscheinung treten, ein. Abhilfemaßnahmen und Einrichtungen, bei denen neben rein elektrischen Verfahren auch radioaktive Stoffe Verwendung finden, werden von HENRY im Abschnitt „Electrostatic eliminators in textile industry“ beschrieben und BULGIN bringt in der Abhandlung „Static electricity on rubber tyred vehicles“ Messungen über die elektrostatische Aufladung von Automobilreifen (100 000 V!) und geht auf die dabei hervorgerufenen Beschädigungen der Radreifen näher ein. Zwei Aufsätze von PEACE und MORRIS „The electrostatic ignitibility and electrification of finely powdered Hexamine“ und „The ignition of explosives by condenser discharges—effect of added circuit resistance“ befassen sich schließlich mit der Entstehung und Vermeidung von Explosionen durch elektrostatische Funkenentladung.

Die wissenschaftliche und praktische Bedeutung elektrostatischer Probleme und der in England versuchten Lösungen tritt in der Aufsatzreihe jedenfalls klar hervor. Es bleibt nur zu wünschen, daß auch über den Stand der jüngsten deutschen Forschung auf elektrostatischem Gebiet einmal zusammenfassend berichtet werden möge.

P. KLAUDY, Graz.

Vacuum. A Review of Development in Vacuum Research and Engineering. Band III, Nr. 2, April 1953. S. 112—229. London: W. Edwards & Co. Ltd. 1954. £ 2/10 s. pro Jahr.

Die lebhaft entwickelte Entwicklung der Vakuumtechnik und ihrer mannigfachen Anwendungen in der Forschung ebenso wie in der industriellen Fertigung im letzten Jahrzehnt haben bei den in diesem Arbeitsbereich Tätigen seit langem den Wunsch nach einer eigens ihrem Fachgebiet gewidmeten Zeitschrift entstehen lassen. Es ist daher in hohem Maße zu begrüßen, daß vor drei Jahren sowohl in Deutschland wie in England je eine Zeitschrift ins Leben gerufen wurden, die sich ausschließlich mit der Vakuumtechnik und den angrenzenden Wissensgebieten befassen. Der Inhalt der uns vorliegenden englischen Zeitschrift „Vacuum“, die in jährlich vier, je etwa 100 Seiten starken Heften erscheint, ist folgendermaßen gegliedert: je etwa ein Drittel zusammenfassende Berichte, Originalmitteilungen und Literaturberichte. Wenn wir die bisher erschienenen Hefte der Zeitschrift durchblättern, so finden wir Aufsätze über das rein Apparative (Pumpen, Baffles, Ventile, Dichtungen, Druckmeßeinrichtungen), über die für die Vakuumtechnik geeigneten Materialien und insbesondere die Treibmittel der Diffusionspumpen, über elektrische Entladungen, Gasaufzehrung, Getterung, Absorption, über die Erzeugung und die Physik dünner Schichten, wie sie heute bei einer großen Anzahl von Anwendungen als Interferenz- und Polarisationsfilter und das Reflexionsvermögen vermindern oder auch erhöhenden Schichten eine Rolle spielen, und über die Präparationstechniken der Vielstrahlinterferometrie, Elektronenbeugung und Übermikroskopie. Besondere Beachtung verdienen auch Aufsätze über Fragen der Vakuummetallurgie, eines Gebietes, das sich mit dem Sintern und Schmelzen von Metallen, bzw. Metallegierungen im Vakuum befaßt und hinsichtlich Reinheitsfestigkeit und anderer Eigenschaften Ergebnisse gezeitigt hat, die auf keinem anderen Wege bisher erreicht werden konnten, sodaß dieses Verfahren in zunehmendem Maße großtechnischen Einsatz findet. Besonders wertvoll sind auch die Literatur- und Patentauszüge, die nach Art der „Physikalischen Berichte“ — teilweise aber noch ausführlicher — verfaßt und nach Teilgebieten (Apparatives, elektrische, mechanische, optische und chemische Erscheinungen, Metallurgie, Materialien, Verdampfung, Kathodenzerstäubung, Trocknung, Destillation, Gefriertrocknung) geordnet sind. Das Studium der Zeitschrift kann jedem, der sich mit Problemen der Vakuumtechnik zu befassen hat, nur empfohlen werden. Es wäre nur zu wünschen, daß es dem Herausgeber bald gelänge, die Phasenverzögerung auszugleichen, die darin besteht, daß z. B. das April-Heft 1953 erst im Dezember 1954 erschienen ist.

R. HAEFER, Vaduz, Fürstentum Lichtenstein

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. . . . kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satz-kosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Wir suchen für interessante Arbeiten auf dem Transistoren-Gebiet
**mehrere Physiker sowie
einen Chemiker** (Fachrichtung anorganische Chemie) oder
Physiko-Chemiker

Es handelt sich vor allem um schwierige experimentelle Arbeiten.
Günstige Arbeitsbedingungen (5-Tage-Woche). Ausführliche Bewer-
bungen an: **INTERMETALL, Düsseldorf, Königsallee 14—16**

Die wissenschaftliche und angewandte Photographie

Erneuerung und Fortführung' des Hay-v. Rohrschen Handbuchs der
wissenschaftlichen und angewandten Photographie

Herausgegeben von **Kurt Michel**, Aalen/Württemberg

Soeben erschien:

Band V: Die Technik der Negativ- und Positivverfahren. Von Dr. EDWIN MUTTER, Hamburg. Mit 91 Textabbildungen. XX, 396 Seiten. Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, \$ 15.70

Erstmalig erscheint mit dem vorliegenden Band eine umfassende Darstellung der photographischen Negativ- und Positivtechnik, die sowohl dem Wissenschaftler und dem Studierenden als auch dem Praktiker gerecht wird. Seitdem die klassischen photographischen Werke von J. M. EDER nicht mehr erscheinen, fehlte für das deutsche Sprachgebiet eine derartig umfassende Behandlung des Stoffes vollständig. Der Autor, ein Schüler von Prof. Dr. J. EGGER, Technische Hochschule Zürich, und Prof. Dr. E. STENGER, Kreuzwertheim, ist nicht nur ein anerkannter Fachmann auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, sondern verfügt auch über reiche praktische Erfahrungen, die er in exponierten Stellungen in nahezu drei Jahrzehnten gesammelt hat. In photographischen Fachkreisen haben besonders seine zahlreichen Veröffentlichungen in Fachzeitschriften über den heutigen Stand der photographischen Technik und die Grundlagen der Photographie in Theorie und Praxis großen Widerhall gefunden. Diesem Prinzip der Verbindung von Theorie und Praxis ist der Verfasser auch im vorliegenden Werk treu geblieben. Es umfaßt sowohl die Praxis der Verfahrenstechnik, von der zweckentsprechenden Vorschrift bis zur erzielten Wirkung, als auch die hierbei auftretenden Vorgänge in chemischer und physikalischer Hinsicht nach dem heutigen Stande der Forschung. Das Werk eignet sich zum Studium der einzelnen Prozesse und Verfahren wie auch als Rezept- und Nachschlagewerk. Die Rezeptsammlung berücksichtigt besonders stark die ausländische Literatur, die uns allgemein weniger zugänglich ist.

Vor kurzem erschienen:

Band I: Das photographische Objektiv. Von Dr. JOHANNES FLÜGGE, R. Winkel G. m. b. H., Optische Werke, Göttingen. Mit einem Beitrag von Physiker LEO BIERWAGEN, Göttingen. Mit 196 teils farbigen Textabbildungen. XIII, 373 Seiten. Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen S 414.—, DM 69.—, sfr. 70.70, \$ 16.45

Band III: Die kinematographische Kamera. Von Dipl.-Ing. Dr.-Ing. HARALD WEISE, Köln. Mit 521 Textabbildungen. XVI, 472 Seiten. Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen S 478.—, DM 79.80, sfr. 81.70, \$ 19.—

In weiterer Folge werden erscheinen:

Band II: Die photographische Kamera.
Band IV: Die Theorie des Negativ- und Positivprozesses.
Band VI: Die Theorie und Praxis der Farbenphotographie.
Band VII: Die Standbild- und Kinoprojektionsgeräte.
Band VIII: Die Stereophotographie.
Band IX: Die Photogrammetrie.
Band X: Die Mikrophotographie.
Band XI: Die Reproduktionsphotographie.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung